UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Teoremas de tipo Krein-Milman y retracciones en espacios de Banach

Mª Gracia Sánchez-Lirola Ortega
Departamento de Álgebra y Análisis Matemático
Universidad de Almería
Mayo 2010

Tesis Doctoral

Teoremas de tipo Krein-Milman y retracciones en espacios de Banach

Tesis Doctoral realizada en el Departamento de Álgebra y Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Experimentales de la Universidad de Almería, bajo la dirección del profesor Dr. D. Juan Carlos Navarro Pascual, el día 27 de Mayo de 2010, ante el Tribunal constituído por los siguientes profesores:

Presidente:	Dr. D. Juan Francisco Mena Jurado
Secretario:	Dr. D. El Amín Kaidi Lhachmi
Vocales:	Dr. D. Fernando Rambla Barreno
	Dr. D. Francisco Javier Pérez Fernández
	Dr. D. María del Pilar Cembranos Díaz

Obtuvo la calificación de Apto *Cum Laude*, por unanimidad.

A Luis, mi marido.

Indice

Introducción

Desde la aparición a comienzos del siglo pasado del concepto de punto extremo de un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, el interés por tales elementos, y sobre todo por la posibilidad de reconstruir el convexo a partir de ellos, ha ido en aumento y se ha materializado en una gran diversidad de resultados, algunos de los cuales se han convertido en auténticos clásicos del Análisis Funcional. Los primeros trabajos que podemos encontrar en la literatura contenían ya información relevante aunque con severas restricciones sobre el espacio ambiente. Mostraban en particular que todo subconjunto convexo y compacto K del espacio euclídeo real n-dimensional es la envolvente convexa de sus puntos extremos. Un resultado muy conocido que debemos a Minkowski y que admite un interesante refinamiento a la luz de las aportaciones de Carathéodory. Concretamente, es posible controlar la longitud de las combinaciones convexas que expresan a los elementos de K en función de sus puntos extremos. De forma más precisa, pueden conseguirse representaciones con longitud menor o igual que $n+1$, siendo n la dimensión del espacio que contiene a K.

El resultado más importante en relación con la estructura extremal de los conjuntos convexos es debido a Krein y Milman que, en 1940, logran extender el Teorema de Minkowski a espacios infinito-dimensionales (véase

[35]). La extensión no puede ser literal pues, como parecen sugerir las ideas de Carathéodory, no es razonable esperar que las combinaciones convexas finitas de puntos extremos regeneren por sí mismas a un conjunto convexo y compacto que ahora dispone de infinitas dimensiones. El Teorema de Krein-Milman afirma en definitiva que todo subconjunto convexo y compacto de cualquier espacio localmente convexo separado es la envolvente convexo-cerrada del conjunto de sus puntos extremos. La versión original contenía ya la esencia de tal afirmación aunque el espacio ambiente era el dual de un espacio de Banach con su topología débil-*.

Una de las consecuencias más significativas de este teorema es el principio de optimización de Bauer que permite localizar entre los puntos extremos de todo conjunto convexo, compacto y no vacío K de un espacio localmente convexo real los extremos absolutos de una importante clase de funciones reales definidas en K.

No obstante, las hipótesis de estos teoremas impiden su aplicación, por ejemplo, a la bola unidad de los espacios de Banach infinito-dimensionales, pues la compacidad de tal conjunto, para la topología de la norma, es característica de los espacios de dimensión finita. A pesar de ello, en virtud del Teorema de Banach-Alaoglú, la topología débil-* de un espacio de Banach dual constituye un marco adecuado para extraer consecuencias importantes y bien conocidas de los resultados mencionados. De hecho, ya hemos indicado que éste era precisamente el escenario que habían elegido Krein y Milman en su influyente trabajo.

Pero un dual no deja de ser un caso especial entre los espacios de Banach. Por otra parte, aún en las situaciones que contempla el Teorema de Krein-Milman, es interesante considerar otras formas más eficientes de generación de la bola unidad. De hecho, además de las reconstrucciones mediante envolventes convexo-cerradas de puntos extremos, han sido objeto de estudio, en multitud de trabajos posteriores, reconstrucciones más perfectas (mediante envolventes convexas, secuencialmente convexas o representaciones en términos de integrales vectoriales).

Por otra parte, aún en ausencia de compacidad, existen importantes clases de espacios de Banach cuya bola unidad posee una rica estructura extremal. Naturalmente, éste es el caso de los espacios estrictamente convexos, pero también de importantes álgebras de funciones continuas y de operadores. Digamos, sin ir más lejos, que la bola unidad de $C(K)$, el álgebra compleja de las funciones continuas definidas en un espacio compacto de Hausdorff K, coincide con la envolvente convexo-cerrada de sus puntos extremos. Un hecho probado por Phelps en [52]. Para una tal álgebra los puntos extremos de la bola unidad y los elementos unitarios son exactamente los mismos. Posteriormente, Russo y Dye demostraron en [57] que el grupo de los elementos unitarios de cualquier C^*-álgebra (compleja y unital) verifica también la igualdad que había descubierto Phelps en el caso especial de $C(K)$.

La gran variedad de aplicaciones del Teorema de Krein-Milman y de los resultados que acabamos de citar justifican ampliamente el interés de la obtención de teoremas de este tipo para subconjuntos convexos no necesariamente compactos de un espacio normado. La bola unidad es sin duda el más representativo de tales conjuntos y sobre ella concentraremos nuestra atención en esta memoria. El primer paso suele ser la descripción de los puntos extremos para, a continuación, determinar si generan la bola mediante alguno de los procedimientos ya mencionados (envolventes convexas, secuencialmente convexas o convexo-cerradas).

Aunque no se encuentra entre los objetivos de este trabajo, es obligado mencionar que la investigación de puntos extremos está conectada con un problema de gran relevancia en la teoría de espacios de Banach. En concreto, nos referimos a la posible equivalencia entre las propiedades de Krein-Milman y Radon-Nikodym. La producción científica en relación con tal problema es incesante y ha propiciado la aparición de numerosos conceptos y resultados de carácter geométrico.

A lo largo de esta memoria nos centraremos en el estudio de la estructura extremal de la bola unidad de los espacios de funciones continuas vectorialmente valuadas. No se exigirá la compacidad del espacio de salida (pero sí la acotación de las funciones) y por tanto cabe también la consideración de espacios de funciones uniformemente continuas que, de hecho, conformarán el ambiente en el que se desarrollará la mayor parte del trabajo. Hemos incorporado además un capítulo en el que se sustituye la norma uniforme por el diámetro de la imagen de las funciones. Una seminorma que ha motivado diversos y muy recientes trabajos en la línea del Teorema de Banach-Stone. En nuestro caso concreto, analizaremos su comportamiento en relación con los teoremas de tipo Krein-Milman. Se trata de una primera y, sin duda, modesta incursión en un terreno prácticamente inexplorado. Esto aumenta a nuestro juicio su interés, aún siendo conscientes de las dificultades de gran calado inherentes a este nuevo funcional. Estudiaremos también la conexión de la estructura extremal de los espacios de funciones uniformemente continuas con ciertos problemas de topología infinito-dimensional y, en particular, con la teoría de retracciones en espacios de Banach.

Con objeto de entrar cuanto antes en el contenido y objetivos concretos de esta tesis, hemos de referirnos brevemente a la notación y terminología que usaremos.

A partir de este momento X denotará un espacio normado no trivial del que, salvo mención en contra, sólo se empleará su estructura real. Los símbolos B_X y S_X denotarán la bola unidad cerrada y la esfera unidad de X, respectivamente. Siguiendo la notación clásica pondremos S^1, en lugar de S_X, si X es el espacio euclídeo real de dimensión dos. Por otra parte, E_X representará el conjunto de los puntos extremos (eventualmente vacío) de B_X. Además $\mathrm{co}(E_X)$ y $\overline{\mathrm{co}}(E_X)$ serán, como es habitual, las envolventes convexa y convexo-cerrada de E_X, respectivamente. Cada vez que hagamos referencia a la dimensión de un espacio normado X nos referiremos, aún cuando posea estructura compleja, a su dimensión como espacio vectorial real y la denotaremos por $\dim X$. Un espacio topológico arbitrario será designado por T y mediante el símbolo $C(T,X)$ denotaremos el espacio de las funciones continuas y acotadas de T en X, provisto, como es costumbre, de su norma uniforme:

$$\|f\| = \sup\{\|f(t)\| : t \in T\}, \text{ para todo } f \in C(T,X).$$

El espacio de Banach dual de un espacio normado X será representado por X^* y si A es un subconjunto de X escribiremos $\mathrm{lin}\, A$ para referirnos al subespacio real de X engendrado por A. Dados $x, y \in X$ el símbolo $[x,y]$ designará el segmento lineal cerrado determinado por tales puntos:

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty : t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t \leq 1\}$$

El significado de $[x,y[$ y $]x,y]$ resulta igualmente obvio.

En espacios del tipo $C(T,X)$, el problema de la descripción de los puntos extremos de la bola unidad no está resuelto a plena generalidad. Sin embargo, para X estrictamente convexo (un espacio de Hilbert en particular) tales puntos son las funciones continuas de T en la esfera unidad de X.

Una breve semblanza de los precedentes relacionados con la memoria nos servirá para comprender el estado actual de esta línea y motivar, al mismo tiempo, los problemas que abordaremos.

De forma muy concisa podemos resumir los hechos ya conocidos sobre la estructura extremal de los espacios $C(T,X)$ en los siguientes términos:

Si T es un espacio topológico completamente regular y X es un espacio normado estrictamente convexo de dimensión mayor o igual que dos, la bola unidad del espacio $Y = C(T,X)$ es la envolvente convexa de sus puntos extremos si, y sólo si, X es infinito dimensional o $\dim T < \dim X$, donde $\dim T$ denota la dimensión recubridora de T (la definición precisa de esta dimensión topológica puede verse por ejemplo en [14]). Además, en caso afirmativo, todo elemento de B_Y se expresa como combinación convexa de ocho puntos extremos ([39]). En este contexto hemos de mencionar las aportaciones de Cantwell y Peck (véase [7] y [50]) que habían conseguido versiones previas de este hecho bajo condiciones sustancialmente más restrictivas (X un espacio de Hilbert y T compacto). Existen situaciones muy diversas en las que el valor mencionado para la longitud de las combinaciones convexas puede reducirse a tres. Concretamente, esto ocurre si se cumple alguna de las condiciones que siguen:

i) X es de dimensión infinita ([44])

ii) X es de dimensión finita, T es compacto y contráctil y $\dim T < \dim X$ ([29])

iii) X es de dimensión finita par y $\dim T < \dim X$ ([44])

iv) X es de dimensión finita y $\dim T < \dim X - 1$. ([29])

En el caso $X = \mathbb{R}$ no cabe esperar la igualdad $B_Y = \mathrm{co}(E_Y)$ (salvo en situaciones triviales). Sin embargo, Bade y Peck (véase [2] y [50]) probaron independientemente que la bola unidad de $C(T,\mathbb{R})$ es la envolvente convexo-cerrada de sus puntos extremos si, y sólo si, T es totalmente disconexo.

Aún se puede afinar más en lo referente al rango o longitud de las representaciones convexas por medio de puntos extremos. Centremos ahora nuestra atención en las combinaciones convexas más sencillas que, evidentemente, son aquellas en las que los escalares coinciden. Dado un natural n, diremos que el **rango extremal** de un espacio normado Y es menor o igual que n si todo elemento de la bola unidad cerrada de Y puede expresarse como media de no más de n puntos extremos de B_Y. Si no existe ningún natural n que cumpla lo anterior se dice que el rango extremal de Y es infinito (lo que en particular ocurre si $E_Y = \emptyset$). En otro caso, el rango extremal de Y es el mínimo natural n que satisface la condición citada. Es obvio que $\mathbb{R}$ tiene rango infinito y que cualquier espacio estrictamente convexo de dimensión mayor que uno tiene rango dos. Es igualmente evidente que no existen espacios normados con rango extremal uno (si sólo consideramos, como indicábamos anteriormente, espacios normados no triviales). Robertson caracterizó en [54] los espacios compactos de Hausdorff T tales que el rango extremal de $C(T, \mathbb{C})$ es igual a dos. Kadison, Olsen, Pedersen y Rordam, entre otros, han estudiado una noción similar, para unitarios en lugar de extremos, en el marco de las C^*-álgebras (complejas y unitales). Véase a este respecto [32], [49] y [55].

Concluimos la exposición de preliminares con algunos comentarios sobre la interacción de la estructura extremal de los espacios de funciones continuas con la teoría de retracciones en espacios de Banach.

Si X es un espacio normado de dimensión infinita y $T = B_X$ (con la topología de la norma) los resultados que describen la estructura extremal de $C(T, X)$ originan de forma natural interesantes cuestiones acerca de retracciones de B_X sobre S_X.

Hemos de señalar en primer lugar que la existencia de retracciones continuas de la bola unidad sobre la esfera unidad de cualquier espacio normado infinito-dimensional X fue probada por Dugundji en [12]. Posteriormente, Benyamini y Sternfeld ([4]) mejoraron sustancialmente este resultado probando que, de hecho, S_X es un retracto de Lipschitz de B_X.

Los primeros resultados que muestran la conexión de tal tipo de retracciones con la geometría de $C(T, X)$ aparecen en [6] y [44]. Es conocido a partir de tales trabajos que la identidad en la bola unidad de un espacio normado infinito-dimensional y estrictamente convexo X puede expresarse como media de un número finito de retracciones continuas de la bola en la esfera unidad de X. Posteriormente, como puede verse en [27], se consigue demostrar que dicha representación de la identidad es factible mediante retracciones uniformemente continuas si X admite estructura compleja y, en tal caso, no se requiere su convexidad estricta. En cambio, la representación por medio de retracciones lipschitzianas parece estar vedada aunque, de momento, sólo tenemos constancia de tal hecho en el caso de los espacios de Hilbert.

Pasamos ya a describir el contenido de la memoria:

En el primer capítulo analizamos la posibilidad de que el rango extremal de un espacio del tipo $C(T, X)$, con X estrictamente convexo, sea igual a dos. Esta propiedad nos dice, como hemos visto anteriormente, que cada elemento de la bola unidad de $C(T, X)$ puede expresarse como media de dos puntos extremos. Se asumirá en toda la discusión que la dimensión de X es mayor o igual que dos, pues el rango extremal de $C(T, \mathbb{R})$ es infinito (piénsese que si n es un natural y $e_1, \ldots, e_n$ son puntos extremos de la bola unidad de $C(T, \mathbb{R})$, los valores de la función $\frac{e_1+\cdots+e_n}{n}$ son todos racionales. En consecuencia, si α es un irracional del intervalo $]-1, 1[$, la función constantemente igual a α no coincide con ninguna función del tipo $\frac{e_1+\cdots+e_n}{n}$).

La propiedad sobre el espacio $Y = C(T, X)$ que estudiamos en este capítulo implica, como a continuación observaremos, una cierta condición que, por su contenido geométrico, denominamos triangulabilidad. Concretamente,

Decimos que E_Y es **triangulable** si dado $e \in E_Y$ existe $u \in E_Y$ tal que

$$-e(t) \neq u(t) \neq e(t), \text{ para todo } t \in T.$$

Mostramos después que la triangulabilidad de E_Y no es suficiente para garantizar que el rango extremal del espacio Y sea dos, ni siquiera en presencia de la igualdad $B_Y = \text{co}(E_Y)$. A través de tales consideraciones llegaremos de forma natural al concepto de F-espacio que, a su vez, puede entenderse en los siguientes términos:

Un espacio topológico T recibe el nombre de F**-espacio** si cada función continua y acotada definida en un co-cero de T y con valores en $\mathbb{R}$ admite una extensión continua a todo T.

Los espacios topológicos que acabamos de considerar son conocidos también en la literatura como espacios subestonianos.

Por otra parte, la noción de F-espacio está conectada con una propiedad extraordinariamente útil en nuestro estudio del mínimo rango extremal en $C(T, X)$:

Dado un espacio topológico T y un espacio normado X, se dice que $C(T, X)$ tiene **descomposición polar** si para cada $f \in C(T, X)$ existe una función continua e de T en S_X tal que

$$f(t) = ||f(t)||e(t), \text{ para todo } t \in T.$$

Disponemos ya de todos los elementos necesarios para enunciar el resultado principal de este capítulo (Teorema 1.7):

Sea T un espacio topológico y X un espacio normado estrictamente convexo. Supongamos que $E_{C(T,X)}$ es triangulable y que $C(T,X)$ tiene descomposición polar. Entonces el rango extremal de $C(T,X)$ es igual a dos.

Las hipótesis del resultado anterior se cumplen, por ejemplo, si T es un F-espacio y se verifica una, al menos, de las condiciones ii), iii) y iv) previamente enunciadas (véase la página xiv).

Finalmente, dado un espacio estrictamente convexo bidimensional X, conseguimos caracterizar los espacios compactos de Hausdorff T para los que $C(T,X)$ tiene rango extremal igual a dos (Teorema 1.10):

Sea X un espacio normado estrictamente convexo de dimensión 2 y T un espacio topológico compacto de Hausdorff. Son equivalentes:

i) T es un F-espacio y $\dim T \leq 1$.

ii) $C(T,X)$ tiene descomposición polar.

iii) Todo punto de la bola unidad de $C(T,X)$ es media de dos puntos extremos.

Ya hemos comentado que la identidad en cualquier espacio normado estrictamente convexo de dimensión infinita X puede expresarse como media de retracciones continuas de B_X sobre S_X. El resultado de Benyamini y Sternfeld que citábamos anteriormente pone al descubierto la posibilidad de mejorar la calidad de tal representación exigiendo algo más que continuidad a las retracciones que intervienen. Somos conscientes de que no podemos pedir una condición de Lipschitz y, al mismo tiempo, sabemos que si X admite estructura compleja es posible una representación con retracciones uniformemente continuas. En este escenario es obligado preguntarse por la situación que corresponde al caso real. La relación existente entre la estructura extremal de los espacios de funciones continuas vectorialmente valuadas y la teoría de retracciones nos lleva, de este modo, a estudiar los espacios de funciones uniformemente continuas. Este análisis ocupará los siguientes tres capítulos de la memoria y proporcionará sus frutos en la teoría de retracciones. Pero antes tendremos ocasión de conocer con cierto detalle la estructura extremal de los espacios de funciones uniformemente continuas, lo que goza de un interés propio e independiente de la teoría citada.

El tránsito de los espacios de funciones continuas a los espacios de funciones uniformemente continuas vectorialmente valuadas entraña la superación de severas dificultades que se pondrán de manifiesto en los comentarios siguientes.

El segundo capítulo de la memoria está dedicado íntegramente al estudio de una nueva desigualdad que es válida en cualquier espacio normado bidimensional (Teorema 2.6):

Sea X_0 un espacio normado de dimensión dos y $a \in X_0 \backslash \{0\}$. Entonces existe un número real $\rho > 0$ (que sólo depende de $||a||$) tal que

$$| \, ||y-a|| - ||x-a|| \, | \geq \rho(1 - \tfrac{||x+y||}{2}), \tag{0.1}$$

para cualesquiera $x, y \in S_{X_0}$ tales que $f(x)f(y) \geq 0$, donde f es un elemento de X_0^* con $\ker f = \mathrm{lin}\,\{a\}$.

El vector a o, más exactamente, el subespacio que engendra, divide la esfera unidad de X_0 en dos "semicircunferencias". Además, la condición $f(x)f(y) \geq 0$ nos dice precisamente que x e y deben pertenecer a una de ellas. La denominación que usamos para la desigualdad anterior está basada en este hecho.

La desigualdad de la semicircunferencia será crucial para obtener, en los siguientes capítulos, resultados sobre la estructura extremal de la bola unidad en espacios de funciones uniformemente continuas y sobre retracciones en espacios normados de dimensión infinita.

Es fácil intuir, en vista del segundo miembro de (0.1), que la hipótesis de convexidad uniforme aportará un ambiente especialmente propicio para aplicar con éxito la desigualdad. Pero, como veremos más adelante, será de hecho aplicable en situaciones considerablemente más generales.

Siempre hemos considerado la desigualdad como una herramienta más para alcanzar nuestros objetivos y, por tanto, hemos prestado poca atención a la búsqueda del valor óptimo de la constante ρ. No obstante, en la parte final del capítulo probamos que, en el caso hilbertizable, $\rho = 2\min\{1, \|a\|\}$ (Teorema 2.12).

En el tercer capítulo estudiamos aplicaciones entre esferas sin puntos fijos ni antípodas. La existencia de tal tipo de aplicaciones en las condiciones que detallaremos a continuación será decisiva para la obtención de los resultados principales de la memoria.

Puesto que la esfera unidad de $\mathbb{R}$ se reduce al conjunto $\{-1, 1\}$ es claro que cualquier aplicación que parta de un subconjunto no vacío de dicha esfera y tome sus valores en $\{-1, 1\}$ fija algún punto o transforma un punto en su antípoda. Por tanto, sólo se considerarán espacios normados de dimensión mayor o igual que dos (sobre $\mathbb{R}$).

Por otra parte, es bien conocido que toda aplicación continua de la esfera unidad del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2n-1}$ en sí misma tiene algún punto fijo o transforma algún punto en su opuesto. Un resultado que se extiende inmediatamente a cualquier espacio normado de dimensión impar. Así pues, con carácter general, no cabe esperar que existan aplicaciones uniformemente continuas (ni siquiera continuas, como se acaba de indicar) definidas en la esfera unidad de un espacio normado y con valores en dicha esfera. Sin embargo, podemos restringirnos a subconjuntos convenientes de la esfera unidad para obtener un resultado positivo en la línea que acabamos de exponer. Además, en tal caso, podemos conseguir aplicaciones que son, de hecho, lipchitzianas. Exponemos ya, sin más preámbulos, el resultado fundamental (Teorema 3.4):

Sea X un espacio normado de dimensión mayor o igual que dos, $x_0 \in S_X$ y $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho \leq 2$. Entonces existe una aplicación lipschitziana v, de $S_X \backslash B(x_0, \rho)$ en S_X, tal que

$$\inf \{\|v(x) \pm x\| : x \in S_X \backslash B(x_0, \rho)\} > 0.$$

Una vez probado este enunciado dedicaremos cierta atención a las mejoras que pueden conseguirse en dimensión par o infinita y, posteriormente, abordaremos una cuestión que nos parece sumamente interesante, sobre todo, por los problemas que deja abiertos para el futuro. Se trata, en concreto, de analizar la posible existencia de aplicaciones entre esferas, sin puntos fijos ni antípodas aproximados, que sean de hecho restricción de aplicaciones lineales. Esto ocurre evidentemente en cualquier espacio normado complejo (basta considerar la aplicación $x \mapsto ix$). Sin embargo, como veremos en la última sección del capítulo, todo espacio normado real y suave puede renormarse de modo que cada isometría lineal posea un punto fijo o transforme un punto en su antípoda (Teorema 3.11).

La desigualdad de la semicircunferencia y las aplicaciones sin puntos fijos ni antípodas constituyen la base sobre la que abordar de manera eficiente nuestro estudio de la estructura extremal de los espacios de funciones uniformemente continuas vectorialmente valuadas.

En lo que sigue M será un espacio métrico (no necesariamente compacto) y, si X es un espacio normado, $U(M, X)$ denotará el espacio de las funciones uniformemente continuas y acotadas de M en X provisto de su norma uniforme.

Si M es compacto, $U(M, X)$ coincide con el espacio de las funciones continuas de M en X. Este hecho y la costumbre, ampliamente extendida, de estudiar los espacios de funciones continuas bajo la hipótesis de compacidad de M, explica la escasez de precedentes relativos a $U(M, X)$ (para M no compacto).

El cuarto capítulo de la memoria contiene un análisis de la geometría de la bola unidad de $U(M, X)$ siendo X un espacio normado uniformemente convexo de dimensión mayor o igual que dos. Si la dimensión de X es infinita abordaremos también la interacción de tal estudio con la teoría de retracciones de B_X sobre S_X. Como veremos más adelante, los resultados sobre retracciones pueden conseguirse en realidad con una condición mucho más débil que la convexidad uniforme de X que puede motivarse con las técnicas que hemos desarrollado.

Comenzamos el capítulo con algunos hechos, más o menos elementales, que se refieren a la descripción de los puntos extremos de la bola unidad en los espacios funcionales ya presentados. En el transcurso de esta discusión hemos detectado una propiedad que nos parece muy útil y que exponemos a continuación (la terminología que hemos empleado para designarla es muy vaga pero cumple su papel):

Dado un espacio topológico T y un espacio normado X, decimos que un subespacio Y de $C(T, X)$ **tiene suficientes funciones no nulas** si se verifica la siguiente condición: para cada $f \in Y$ y cada $t_0 \in T$, existe una aplicación (no necesariamente continua) $g : T \to B_X$ de modo que $g(t_0) \neq 0$

y la función $t \mapsto (1 - \|f(t)\|)g(t)$, de T en X, pertenece a Y.

Es inmediato que el propio espacio $C(T,X)$ tiene suficientes funciones no nulas y lo mismo ocurre con $U(M,X)$ (un subespacio de $C(M,X)$). Por otra parte, si L es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff, $C_0(L,X)$ (un subespacio de $C(L,X)$) tiene también suficientes funciones no nulas.

El interés de la propiedad que acabamos de introducir se pone de manifiesto en la Proposición 4.1:

Dado un subespacio Y de $C(T,X)$ con suficientes funciones no nulas y $e \in E_Y$ se tiene que $\|e(t)\| = 1$ para todo $t \in T$.

Señalemos además que si X es estrictamente convexo la afirmación recíproca es también cierta, lo que nos proporciona, simultáneamente, una caracterización de los puntos extremos de la bola unidad de los espacios $C(T,X)$ y $U(M,X)$. La correspondiente al primero de ellos había sido comentada anteriormente.

Digamos, para hacer énfasis en la utilidad de la noción introducida, que la Proposición 4.1 nos da como corolario inmediato el siguiente hecho bien conocido:

Sea L un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff tal que $E_{C_0(L,X)} \neq \emptyset$. Entonces L es compacto.

Dado un espacio normado X es claro que $E_X \neq \emptyset$ si, y sólo si, $E_{C(T,X)} \neq \emptyset$ para todo espacio topológico T. Cabe también preguntarse si la condición $E_X = \emptyset$ es equivalente a afirmar que $E_{C(T,X)} = \emptyset$ para cada espacio topológico T. Se trata de una cuestión natural que estudiamos muy de pasada pues, de acuerdo con los objetivos de la memoria y en particular con nuestra pretensión de obtener teoremas de tipo Krein-Milman, es lógico trabajar bajo condiciones (como, por ejemplo, la convexidad estricta de X) que garanticen la no vaciedad del conjunto E_X. No obstante, hemos observado que la bola unidad de $C(K, c_0)$ carece de puntos extremos para todo espacio topológico compacto de Hausdorff K. Aunque este hecho constituye una evidencia a favor de la equivalencia anteriormente cuestionada no nos atrevemos a conjeturar que sea cierta con carácter general.

En la segunda sección del capítulo se ponen a punto algunos resultados muy básicos que facilitan el manejo de las funciones uniformemente continuas. Tras estos preparativos, llegamos al núcleo de la teoría, cuyos resultados fundamentales resumimos a continuación.

En la tercera sección probamos que la bola abierta unidad de $U(M, X)$ está contenida en la envolvente convexa de E_Y, siendo M un espacio métrico arbitrario y X un espacio normado uniformemente convexo de dimensión mayor o igual que dos (finita o infinita). Como consecuencia,

$$B_{U(M,X)} = \overline{\mathrm{co}}(E_{U(M,X)}).$$

Este resultado aparece explícitamente en el Teorema 4.16 que, a su vez, se apoya en varios resultados previos, obtenidos en el transcurso de la sección, en los que intervendrán de manera decisiva la desigualdad de la semicircunferencia y las aplicaciones uniformemente continuas entre esferas sin puntos fijos ni antípodas aproximados.

Es interesante precisar que la estructura métrica de M sólo se ha usado para dar sentido a la consideración del espacio $U(M, X)$. De hecho, un rápido análisis de la argumentación que ha conducido al resultado principal (Teorema 4.16) muestra que su validez no se ve afectada si sustituimos M por un espacio uniforme.

En la última sección del capítulo aplicaremos nuevamente la desigualdad de la semicircunferencia para demostrar que la identidad en la bola unidad de un espacio de Banach infinito dimensional y uniformemente convexo X es media de n retracciones uniformemente continuas de B_X sobre S_X, para todo natural $n \geq 3$. De hecho, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ y $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ (siendo $n \geq 3$), existen n retracciones uniformemente continuas $r_1, \ldots, r_n$, de B_X sobre S_X, tales que

$$x = \lambda_1 r_1(x) + \cdots + \lambda_n r_n(x), \text{ para todo } x \in B_X. \tag{0.2}$$

Este resultado permite derivar información relevante sobre la estructura extremal de los espacios de funciones uniformemente continuas vectorialmente valuadas:

Sean M un espacio métrico arbitrario y X un espacio normado uniformemente convexo e infinito-dimensional. Consideremos un natural $n \geq 3$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ como antes. Entonces

$$B_{U(M,X)} = \lambda_1 E_{U(M,X)} + \cdots + \lambda_n E_{U(M,X)}.$$

El resultado sobre retracciones uniformemente continuas que hemos citado antes (0.2) es válido bajo una condición sobre el espacio infinito-dimensional X mucho más débil que su convexidad uniforme. Si analizamos con detenimiento las técnicas que nos han conducido a tal afirmación observamos que, en realidad, es suficiente suponer que existe una aplicación uniformemente continua $v : S_X \to S_X$ tal que

$$\inf \{||v(x) \pm x|| : x \in S_X\} > 0 \tag{0.3}$$

y, para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $\beta \in]0, 1[$ tal que,

$$x \in S_X,\ z, w \in S_X \cap \operatorname{lin}\{x, v(x)\}, ||z - w|| \geq \delta \Rightarrow ||\tfrac{z+w}{2}|| \leq 1 - \beta. \tag{0.4}$$

La existencia de aplicaciones uniformemente continuas $v : S_X \to S_X$ que cumplan (0.3) está garantizada en todo espacio normado de dimensión infinita X. Si X es uniformemente convexo la condición (0.4) es automática. Por otra parte, si X es un espacio normado complejo, la aplicación $v : S_X \to S_X$ dada por $v(x) = ix$ satisface evidentemente (0.3) y (0.4). Téngase en cuenta que lin $\{x, v(x)\}$ denota el subespacio real de X engendrado por x y $v(x)$. Los precedentes relativos al caso complejo son por tanto una consecuencia inmediata de los obtenidos en este capítulo.

Pasamos ya a describir el quinto capítulo de la memoria. Se produce aquí una ruptura importante con respecto al contenido de los anteriores pues concentraremos nuestra atención en los espacios de funciones con valores en $\mathbb{R}$ y, además, sustituiremos la norma uniforme por el diámetro de la imagen de las funciones. A su vez, tales funciones se supondrán definidas en un espacio topológico compacto de Hausdorff K.

Dada una función continua $f : K \to \mathbb{R}$, $\rho(f)$ denotará el diámetro de $f(K)$. Obtenemos de este modo una seminorma en el espacio $C(K)$ de las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$. Fijemos un punto $t_0 \in K$ y sea X el subespacio de $C(K)$ constituido por las funciones que se anulan en t_0. El funcional ρ convierte a X en un espacio de Banach cuya estructura extremal estudiamos en este capítulo.

Una vez descritos los puntos extremos de B_X (Lema 5.1) probaremos la equivalencia entre las siguientes afirmaciones (Teorema 5.3):

i) Para cada $x \in B_X$ existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ de elementos del intervalo $[0,1]$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ y una sucesión $\{e_n\}$ de puntos extremos de la bola unidad de X tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$.

ii) $B_X = \overline{\text{co}}(E_X)$.

iii) K es totalmente disconexo.

Como consecuencia inmediata obtenemos (Corolario 5.4) que tales afirmaciones son equivalentes en el caso $X = C_0(L)$, siendo L un espacio localmente compacto (no compacto) y $C_0(L)$ el espacio de las funciones reales continuas que se anulan en el infinito provisto de la norma del diámetro.

Obsérvese en particular que en c_0, con la norma del diámetro, se cumplen las afirmaciones i) y ii).

Antes de finalizar esta introducción hemos de señalar que la mayor parte del contenido de la tesis ha sido ya publicado en varios artículos (véanse [31], [46], [47] y [48]).

A continuación quiero mostrar mi agradecimiento en primer lugar a los matemáticos pioneros en el estudio de puntos extremos y a los que nos han sugerido posibles caminos para seguir trabajando en la misma línea. En particular, a Juan Francisco Mena, de la Universidad de Granada, por su enorme calidad humana y por tantos pequeños ratos que ha dedicado a mi formación en investigación.

Agradecer de forma extensiva al departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada por permitirme participar como investigador en los Proyectos de I+D+I que indico a continuación: PB98-1335/1999, P05-FQM-1215/2006, MTM2006-04837, P06-FQM-1438/2007 y P08-FQM-03737/2009.

A la Junta de Andalucía y al Ministerio de Educación, por las ayudas recibidas a través de las distintas convocatorias y por su financiación económica.

A la Universidad de Almería, en particular a los compañeros del departamento al que pertenezco por brindarme la oportunidad de integrarme como docente e investigador y por el apoyo recibido durante estos años. En es-

pecial a Agripina Rubio, compañera y amiga, a la que proceso una enorme admiración y respeto, por sus sabios consejos y por todo lo que he aprendido tan sólo conversando con ella. A Juan Carlos Navarro, director de esta memoria, por su gran dedicación, continuas sugerencias y brillantes ideas que han hecho posible el desarrollo de este trabajo, porque hace fácil lo que no lo es y contagia su entusiasmo por el estudio y disfrute de las matemáticas.

A mis maestros, quienes me motivaron desde muy pequeña para que dedicase mi futuro al estudio de las matemáticas. A mis profesores Jose M^a Martínez Oña y Juan Rafael Muñoz, que me iniciaron en el maravilloso mundo de la música y de la interpretación pianística. Estoy convencida de que también han contribuído en mi admiración hacia las matemáticas, puesto que mi experiencia corrobora aquello que decía Leibnitz, que "la música es un ejercicio de aritmética secreta".

Y como no, a los que en un futuro vendrán y leerán esta memoria, por los que habrá merecido la pena dedicar este esfuerzo y con la esperanza de que los resultados aquí presentados puedan ser objeto de otros posteriores y fructíferos trabajos.

A mi familia y amigos, a quienes sin duda he descuidado mientras trabajaba en el desarrollo y escritura de esta tesis.

A mis padres, a mis hermanos, M^a José y Paco, y a mi abuela Gracia por todo lo que me han enseñado, por la paciencia que han tenido continuamente conmigo y a quienes debo la esencia de quien soy.

Muy en particular a Luis, mi marido y a mi hija Irene porque son la luz en mi camino y han sido un constante estímulo en este arduo trabajo.

A todos ellos GRACIAS.

Capítulo 1

Rango extremal en espacios de funciones continuas

Nuestro grupo cuenta ya con una cierta trayectoria en el estudio de la geometría de los espacios de funciones vectorialmente valuadas. La mayoría de los resultados previamente obtenidos se refieren a espacios de funciones continuas y su conexión con ciertos hechos de topología infinito-dimensional, fundamentalmente referidos a la teoría de retracciones continuas en espacios de Banach. Uno de los objetivos principales de la memoria pretende una profundización en dicha teoría y, en particular, aspira a considerar mejores propiedades sobre las retracciones que la mera continuidad. La que más nos interesa es la continuidad uniforme y, sobre todo, su interacción con los teoremas de tipo Krein-Milman en espacios de funciones uniformemente continuas.

No obstante, antes de iniciar este recorrido, incorporamos en este primer capítulo algunos resultados que todavía se hallan en el ámbito original de los espacios de funciones continuas.

1.1 Presentación y preliminares

En primer lugar recordaremos algunas definiciones y concretaremos la notación básica que utilizaremos a lo largo de la memoria.

La noción de punto extremo que precisamos a continuación, aparece por vez primera en un trabajo de H. Minkowski publicado en 1911 (véase [41]). Se trata de un concepto básico y muy conocido, pero dado que será el centro de atención de esta memoria es conveniente fijarlo desde el principio.

Sea C un subconjunto convexo de un espacio normado X. Se dice que $e \in C$ es un **punto extremo** de C si dados $\lambda \in]0,1[$ y $x, y \in C$ tales que $e = \lambda x + (1-\lambda)y$ se verifica que $e = x = y$.

Intuitivamente $e \in C$ es un punto extremo si e no pertenece al interior de ningún segmento contenido en C o, equivalentemente, si $C \backslash \{e\}$ es convexo.

Como ya hemos comentado en la introducción, el estudio que aquí haremos sobre puntos extremos estará referido a un subconjunto muy concreto y característico de los espacios normados, su bola unidad cerrada. En lo sucesivo, E_X representará el conjunto de los puntos extremos (eventualmente vacío) de B_X, la bola unidad cerrada de X. Además, mediante S_X expresaremos la esfera unidad de X. Por otra parte $\operatorname{co}(E_X)$ y $\overline{\operatorname{co}}(E_X)$ serán, como de costumbre, las envolventes convexa y convexo-cerrada de E_X, respectivamente.

Recordemos que un espacio normado X es **estrictamente convexo** si para cualesquiera dos elementos distintos x, y de B_X, se tiene que

$$\|x + y\| < 2.$$

Equivalentemente X es estrictamente convexo si $E_X = S_X$.

Dado un espacio topológico T, el espacio de las funciones continuas y acotadas de T en X con su correspondiente norma uniforme será denotado por $C(T,X)$. Es claro que la bola unidad del espacio $Y = C(T,X)$ está constituida por las funciones continuas de T en B_X.

Aunque lo justificaremos más adelante en ambiente más general, véase la Proposición 4.2 y el comentario que le precede, conviene mencionar aquí que si X es estrictamente convexo, E_Y es el conjunto de las funciones continuas de T en S_X.

A continuación trataremos de motivar el contenido del capítulo.

La estructura extremal de la bola unidad de un espacio normado puede encontrarse en situaciones muy diversas, comprendidas entre la ausencia de tales puntos, que es el caso más desfavorable, como ocurre en c_0 o $L_1([0,1])$, y la convexidad estricta del espacio, que representa la mayor abundancia posible de puntos extremos. En este último caso, exceptuando a $\mathbb{R}$, todo elemento de la bola unidad es media de dos puntos extremos y desde luego, no cabe esperar una reconstrucción más perfecta. Sin embargo, esta propiedad no es exclusiva de los espacios estrictamente convexos. De hecho, si H es un espacio de Hilbert complejo, el álgebra $L(H)$ de los operadores lineales y continuos en H la verifica.

Los resultados que presentamos en la siguiente sección ofrecen un análisis de los espacios $C(T,X)$ cuyo rango extremal alcanza el valor mínimo. Se trata pues de espacios que comparten con los estrictamente convexos o con $L(H)$ la propiedad geométrica que acabamos de mencionar.

Dado que, evidentemente, $C(T,\mathbb{R})$ carece de tal propiedad (de hecho, sólo en casos triviales, la bola unidad de este espacio es la envolvente convexa de sus puntos extremos) supondremos, a lo largo de este capítulo, que la dimensión de X es mayor o igual que 2. Debe quedar claro, como ya hemos comentado en la introducción, que cualquier referencia a la dimensión de un espacio normado en el desarrollo de la memoria, habrá de interpretarsese en el sentido de su estructura real. Así pues, si se trata de un espacio normado complejo, se estará hablando de la dimensión del espacio real subyacente.

Para que aparezcan de forma natural las condiciones y conceptos que vienen impuestos o se relacionan directamente con nuestra propiedad, debemos comentar previamente algunos resultados obtenidos por nuestro grupo. En lugar de ir detallando las referencias concretas para cada una de las afirmaciones que siguen, optamos por una exposición resumida de los hechos que consideramos más relevantes de cara a clarificar el contenido del capítulo. Información que hemos recogido de [6, 28, 29, 30, 39, 44], especialmente [29] y [39].

Teorema 1.1 *Sea X un espacio normado estrictamente convexo de dimensión mayor o igual que 2, T un espacio topológico completamente regular e $Y = C(T, X)$.*

i) Si X es de dimensión finita entonces $B_Y = \mathrm{co}(E_Y)$ si, y sólo si, $\dim T < \dim X$, donde $\dim T$ denota la dimensión recubridora de T.

ii) Si X es infinito-dimensional entonces $B_Y = \mathrm{co}(E_Y)$.

La noción de dimensión topológica que acabamos de mencionar puede consultarse en [14]. Baste decir en este momento que se trata de una generalización, que se desarrolla en el ambiente de los espacios completamente regulares, de la dimensión de los espacios euclídeos. De hecho, la dimensión recubridora de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es n si, y sólo si, su interior es no vacío. Aprovechemos para decir que la condición impuesta a T en el enunciado anterior se debe precisamente a la presencia de la dimensión recubridora y hemos de señalar que, en realidad, las propiedades de un espacio del tipo $C(T, X)$, como espacio de Banach, no permiten distinguir si T es o no completamente regular, pues, cualquiera que sea el espacio topológico T, existe un espacio completamente regular $T^{\#}$ tal que $C(T, X)$ es isométricamente isomorfo a $C(T^{\#}, X)$ (véase a este respecto [64]). Nótese, por tanto, que la segunda afirmación del teorema anterior se verifica para cualquier espacio topológico T.

1.2 Teoremas de representación por medias de longitud dos

El rango extremal de los espacios del tipo $C(T, X)$ depende de las cualidades de T, de las de X, e incluso de la buena avenencia entre ambos espacios. Para ser más concretos, supongamos que estamos ante el mínimo rango posible (a fin de cuentas, ésta es la propiedad que estudiamos). Entonces todo elemento de la bola unidad de $Y = C(T, X)$ es media de dos puntos extremos y, en particular, dado $e \in E_Y$, existen $u, v \in E_Y$ tales que $e = u + v$ (aplíquese la hipótesis a $\frac{1}{2}e$). Es claro pues que

$$-e(t) \neq u(t) \neq e(t), \text{ para todo } t \in T.$$

Decimos en tal caso que E_Y es triangulable (dado cualquier elemento de E_Y existe otro elemento en E_Y que no coincide con el anterior ni con su opuesto en ningún punto). La triangulabilidad de E_Y es automática si T es compacto de Hausdorff y contráctil (cualquiera que sea el espacio estrictamente convexo X de dimensión mayor o igual que 2). También lo es si X es un espacio de dimensión par o infinita (cualquiera que sea el espacio topológico T), pues en ambas situaciones existen aplicaciones continuas v de S_X en S_X sin puntos fijos ni antípodas ($-x \neq v(x) \neq x$, $\forall x \in S_X$). Finalmente, la condición $\dim T < \dim X - 1$ también garantiza que E_Y es triangulable. Aunque, como hemos visto, la triangulabilidad es una condición necesaria para que las medias de longitud dos generen la bola, no es, por sí sola una condición suficiente. Pero, en cualquier caso, permite precisar el contenido del Teorema

1.1. En concreto, bajo la hipótesis de triangulabilidad, la condición de que $B_Y = \mathrm{co}(E_Y)$ equivale a que todo punto de la bola unidad de $C(T, X)$ sea media de tres puntos extremos (piénsese ahora en todas las situaciones antes descritas en las que esto ocurre). Sin embargo, en ausencia de dicha hipótesis, todo lo que sabemos es que los puntos de la bola unidad pueden expresarse como media de ocho puntos extremos.

Cantwell [7] probó una versión del primer apartado del Teorema 1.1 para X igual al espacio euclídeo real n-dimensional ($n \geq 2$) y planteó como problema abierto la determinación de la longitud mínima de las combinaciones convexas que permiten generar la bola. La media de tres es, en el caso triangulable y al nivel de generalidad en el que se sitúan los resultados que estamos comentando, la respuesta al problema. En efecto, es fácil probar que, cualquiera que sea el espacio normado X, la identidad en B_X no es media de dos funciones continuas de B_X en S_X. Este hecho muestra que las hipótesis correspondientes a la segunda afirmación del teorema no son suficientes para garantizar la representación de cada punto de la bola de $C(T, X)$ como media de dos puntos extremos (dado un espacio estrictamente convexo de dimensión infinita X basta considerar $T = B_X$). Las condiciones de la primera afirmación tampoco son suficientes como se deduce del siguiente resultado que constituye nuestra primera aportación. Recordemos previamente que un subconjunto V de un espacio topológico T se dice **funcionalmente abierto** si existe una función continua $f : T \to \mathbb{R}$ tal que $V = \{t \in T : f(t) \neq 0\}$. También se dice en tal caso que el conjunto V es un **co-cero** de T. Evidentemente, V es funcionalmente abierto si, y sólo si, para cada par de números reales α y β tales que $\alpha < \beta$, existe una aplicación continua $f : T \to [\alpha, \beta]$ tal que $V = f^{-1}(]\alpha, \beta])$.

Proposición 1.2 *Sea T un espacio topológico y X el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. Supongamos que todo elemento de la bola unidad de $C(T, X)$ es media de dos puntos extremos. Entonces para cualesquiera n subconjuntos funcionalmente abiertos de T, $V_1, \ldots, V_n$, dos a dos disjuntos, se verifica que* $\overline{V}_1 \cap \ldots \cap \overline{V}_n = \emptyset$.

Demostración:

Sean $V_1, \ldots, V_n$ subconjuntos funcionalmente abiertos de T dos a dos disjuntos. Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe una función continua $f_j : T \to [0, \frac{1}{n}]$ tal que $V_j = f_j^{-1}(]0, \frac{1}{n}])$. La función $f : T \to X$ dada por

$$f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)), \text{ para todo } t \in T$$

es obviamente un elemento de la bola unidad de $Y = C(T, X)$ y por tanto $f = \frac{1}{2}(u + v)$, para convenientes $u, v \in E_Y$. Sean $u_1, \ldots, u_n$ y $v_1, \ldots, v_n$ las coordenadas de u y v, respectivamente. Si $t \in V_1$, entonces $t \in T \setminus \bigcup_{j=2}^{n} V_j$ y por tanto

$$f_j(t) = 0, \text{ para cada } j \in \{2, \ldots, n\}.$$

Luego

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{2}(u_1(t) + v_1(t)), \\ 0 &= \frac{1}{2}(u_j(t) + v_j(t)), \text{ para todo } j \in \{2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Se sigue que $u_j^2(t) = v_j^2(t)$, para todo $j \in \{2, \ldots, n\}$ y como

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} u_j^2(t) = 1 = \sum_{j=1}^{n} v_j^2(t) = \|v(t)\|^2,$$

también se tiene $u_1^2(t) = v_1^2(t)$. Puesto que $f_1(t) \neq 0$, necesariamente

$$u_1(t) = v_1(t) = f_1(t).$$

La continuidad de las funciones que intervienen en las dos igualdades anteriores muestra que éstas son válidas en realidad para cualquier $t \in \overline{V}_1$. Análogamente, no debemos olvidar que para $t \in \overline{V}_1$ también se tiene $f_j(t) = 0$, (cualquiera que sea $j \in \{2, \ldots, n\}$). Razonando con cada uno de los conjuntos $V_2, \ldots, V_n$ tal como hemos hecho con V_1, obtenemos que para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$u_k(t) = v_k(t) = f_k(t), \ \forall t \in \overline{V}_k.$$

$$f_j(t) = 0, \ \forall t \in \overline{V}_k, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{k\}$$

Si existiese $t \in \overline{V}_1 \cap \ldots \cap \overline{V}_n$, entonces

$$u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t)) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) = f(t) = 0$$

lo que nos llevaría a una contradicción. ∎

Si $n = 2$ y T es normal (en particular, si T es compacto de Hausdorff), la tesis del resultado anterior es una de las caracterizaciones de los llamados F-espacios (como puede deducirse de [64, Theorem 1.60]). La definición que se adopta en esta última referencia para tales espacios es, tal vez, la más interesante en nuestro contexto:

Definición 1.3 *Se dice que un espacio topológico T es un F-espacio si para todo subconjunto funcionalmente abierto V de T, se verifica que cada función continua y acotada de V en $\mathbb{R}$ admite una extensión continua a todo T.*

Ni que decir tiene que si la imagen de la función a extender está contenida en un intervalo $[a, b]$, la correspondiente extensión puede elegirse con imagen contenida en el mismo intervalo (ya que obviamente $[a, b]$ es un retracto de $\mathbb{R}$).

La noción de F-espacio es muy restrictiva (piénsese por ejemplo que cada F-espacio metrizable es discreto [20, 14.M.3]). Sin embargo, tales espacios aparecen con cierta frecuencia en la literatura y han sido objeto de un estudio sistemático por parte de Grove y Pedersen [21] bajo el nombre de espacios subestonianos (pues son, de hecho, una generalización de los espacios estonianos). Existen numerosos trabajos, cuyas referencias pueden encontrarse en [21], de autores tales como Gillman y Henriksen, Bade, Choquet, Seever y otros en los que se muestran sus propiedades básicas y su relación con diversos problemas del Análisis Funcional (diagonalización de matrices sobre espacios de funciones continuas escalarmente valuadas, medidas sobre F-espacios, teoremas de densidad de tipo Stone-Weierstrass, etc). Señalemos finalmente que las álgebras de Von Neumann conmutativas son todas del tipo $C(T,\mathbb{C})$ con T un F-espacio compacto de Hausdorff.

En [20, Theorem 14.25] se prueba que un espacio topológico T es un F-espacio si, y sólo si, dada una función continua $f : T \to \mathbb{R}$ existe una función continua $g : T \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(t) = |f(t)|g(t), \text{ para todo } t \in T.$$

Es claro que $|g(t)| = 1$, para todo t tal que $f(t) \neq 0$. Si exigimos $|g(t)| = 1$, para todo $t \in T$, aparece la denominada descomposición polar de f. En general, dado un espacio topológico T y un espacio normado X, se dice que $C(T, X)$ tiene descomposición polar si para cada $f \in C(T, X)$ existe una función continua e, de T en S_X, tal que

$$f(t) = ||f(t)||e(t), \text{ para todo } t \in T.$$

La siguiente observación nos será de utilidad más adelante:

Lema 1.4 *Sea T un espacio topológico y X un espacio normado tales que $C(T, X)$ tiene descomposición polar. Entonces T es un F-espacio.*

Demostración:

Sea $f : T \to \mathbb{R}$ una función continua y fijemos un punto $x \in S_X$. Consideremos la aplicación $h : T \to X$ definida por

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 + |f(t)|}\, x, \text{ para todo } t \in T.$$

Evidentemente $h \in C(T, X)$ y por hipótesis existe $e : T \to S_X$ continua tal que

$$h(t) = ||h(t)||e(t), \text{ para todo } t \in T.$$

Sea $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$. Entonces

$$x^*(h(t)) = ||h(t)||x^*(e(t)), \text{ para todo } t \in T,$$

es decir,

$$\frac{f(t)}{1 + |f(t)|} = \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|}\, x^*(e(t)), \text{ para todo } t \in T.$$

Se sigue que $f(t) = |f(t)|g(t)$, para todo $t \in T$ y una conveniente función continua $g : T \to \mathbb{R}$. De acuerdo con los comentarios anteriores, T es un F-espacio. ■

Si X es de dimensión finita disponemos de una información más precisa:

Teorema 1.5 *[30, Theorem 2.16] Sea T un espacio topológico completamente regular y X un espacio normado de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) T es un F-espacio y $\dim T < \dim X$.

ii) $C(T, X)$ tiene descomposición polar.

Finalmente, necesitaremos el siguiente resultado:

Lema 1.6 *[44, Lemma 1]Sea M un espacio normado estrictamente convexo de dimensión 2, $a \in M \setminus \{0\}$ y $\Phi \in M^*$ tales que $\ker \Phi = \operatorname{lin}\{a\}$. Dados $x, y \in S_M$ tales que $\Phi(x) \geq 0$, $\Phi(y) \geq 0$ y $\|x - a\| = ||y - a||$, se verifica que $x = y$.*

Estamos ya en condiciones de probar el resultado principal:

Teorema 1.7 *Sea T un espacio topológico, X un espacio normado estrictamente convexo y notemos $Y = C(T, X)$. Supongamos que E_Y es triangulable y que Y tiene descomposición polar. Entonces todo punto de la bola unidad de Y es media de dos elementos de E_Y.*

Demostración:

Supondremos, puesto que no se pierde generalidad, que X es real y sea $h \in B_Y$. Por hipótesis, existe $f \in E_Y$ tal que

$$h(t) = ||h(t)||f(t), \text{ para todo } t \in T$$

y al ser E_Y triangulable, existe $e \in E_Y$ tal que

$$f(t) \neq e(t) \neq -f(t), \text{ para todo } t \in T.$$

Definimos $g : [0,2] \times T \to X$ por

$$g(s,t) = \begin{cases} (1-s)f(t) + se(t) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1 \\ \\ (2-s)e(t) - (s-1)f(t) & \text{si} \quad 1 \leq s \leq 2 \end{cases}$$

Claramente g es continua y omite el origen. Podemos pues considerar la función continua Γ, de $[0,2] \times T$ en S_X, definida por

$$\Gamma(s,t) = \frac{g(s,t)}{||g(s,t)||}, \text{ para todo } (s,t) \in [0,2] \times T.$$

Sea $A = \{t \in T : ||h(t)|| \neq 0\}$ y fijemos t en A. Teniendo en cuenta que $h(t) = ||h(t)||f(t)$ y $||f(t)|| = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned} ||2h(t) - \Gamma(0,t)|| &= ||2h(t) - f(t)|| = |2||h(t)|| - 1| \leq 1 \quad y \\ ||2h(t) - \Gamma(2,t)|| &= ||2h(t) + f(t)|| = 2||h(t)|| + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, existe s en $[0,2]$ tal que

$$||2h(t) - \Gamma(s,t)|| = 1.$$

Para probar que s es único, sea $s' \in [0,2]$ tal que $||2h(t) - \Gamma(s',t)|| = 1$. Consideremos $a = 2h(t)$, $M = \text{lin}\{a, e(t)\}$ y $\Phi \in M^*$ tal que

$$\ker \Phi = \text{lin}\{a\} \quad \text{y} \quad \Phi(e(t)) > 0.$$

Es claro que

$$\Phi(\Gamma(s,t)) \geq 0, \quad \text{para todo } s \in [0,2].$$

Aplicando el Lema 1.6 se tiene que $\Gamma(s,t) = \Gamma(s',t)$. De donde se sigue que $s = s'$, teniendo en cuenta que la aplicación $\Gamma(\cdot,t)$, de $[0,2]$ en X, es inyectiva como fácilmente se comprueba.

Denotemos por $s(t)$ el único elemento de $[0,2]$ con $||2h(t) - \Gamma(s(t),t)|| = 1$. Veamos ahora que la aplicación $t \mapsto s(t)$, de A en $[0,2]$, es continua. Si no lo fuese, existiría un punto t en A, una red $\{t_i\}$ de elementos de A y un punto s en $[0,2]$ tal que

$$\{t_i\} \to t \quad \text{y} \quad \{s(t_i)\} \to s \neq s(t).$$

Usando la continuidad de Γ se tiene que

$$\{||2h(t_i) - \Gamma(s(t_i), t_i)||\} \longrightarrow ||2h(t) - \Gamma(s, t)||$$

y entonces

$$||2h(t) - \Gamma(s, t)|| = 1$$

en contra de la unicidad de $s(t)$.

Puesto que T es un F-espacio (Lema 1.4) y evidentemente A es funcionalmente abierto, la función anterior admite una extensión continua de T en $[0, 2]$ que también denotaremos por s.

Finalmente sean e_1 y e_2, de T en X, las funciones definidas por

$$e_1(t) = \Gamma(s(t), t), \;\; e_2(t) = 2h(t) - \Gamma(s(t), t), \;\; \text{para todo } t \in T.$$

Evidentemente $e_1, e_2 \in E_Y$ y $h = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$. ■

En el caso de que el espacio X sea de dimensión 2, conseguimos caracterizar la propiedad que estamos estudiando. En primer lugar necesitamos la siguiente consecuencia del Lema 1.6:

Lema 1.8 *Sea X un espacio normado estrictamente convexo de dimensión 2. Entonces, cada elemento no nulo de la bola unidad de X se expresa de forma única como media de dos puntos de la esfera unidad.*

Demostración:

Sólo la unicidad precisa cierta atención. Sean $a \in B_X \backslash \{0\}$ y x_1, y_1, x_2, y_2 en S_X tales que

$$a = \frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{x_2 + y_2}{2} \; .$$

Sea $x^* \in X^*$ tal que $\ker x^* = \operatorname{lin}\{a\}$. Claramente, $x^*(x_1) = -x^*(y_1)$ y $x^*(x_2) = -x^*(y_2)$, luego, podemos suponer que $x^*(x_1) \geq 0$ y $x^*(x_2) \geq 0$. El Lema 1.6 nos da que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. ■

También necesitaremos el siguiente resultado de claro contenido geométrico:

Lema 1.9 *Sea X un espacio normado estrictamente convexo de dimensión 2 y $\gamma : [0,1] \to X$ una aplicación continua tal que*

$$\gamma([0,1]) = S_X, \qquad \gamma(0) = \gamma(1), \qquad \gamma|_{]0,1]} \text{ es inyectiva y}$$

$$\gamma(s + \frac{1}{2}) = -\gamma(s), \text{ para todo } s \in [0, \frac{1}{2}].$$

Consideremos $x^* \in X^*$ tal que $||x^*|| = x^*(\gamma(0)) = 1$ (un funcional de soporte de B_X en el punto $\gamma(0)$). Entonces, para cada $s \in [0, \frac{1}{2}]$ existe un único $\rho(s) \in [\frac{1}{2}, 1]$ tal que $\gamma(s) - \gamma(\rho(s)) \in \ker x^*$. Además:

i) La aplicación $s \mapsto \rho(s)$, de $[0, \frac{1}{2}]$ en $[\frac{1}{2}, 1]$, es continua.

ii) Existe un único $s_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $\gamma(s_0) \in \ker x^*$.

iii) $s_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ y $\rho(s_0) = s_0 + \frac{1}{2}$.

Demostración:

Puesto que

$$x^*(\gamma(0)) = x^*(\gamma(1)) = 1, \qquad x^*(\gamma(\frac{1}{2})) = -x^*(\gamma(0)) = -1$$

se tiene

$$x^*(\gamma([0, \frac{1}{2}]) = [-1, 1] = x^*(\gamma([\frac{1}{2}, 1]))$$

y de ello se sigue claramente que dado $s \in [0, \frac{1}{2}]$, existe $s' \in [\frac{1}{2}, 1]$ tal que $\gamma(s) - \gamma(s') \in \ker x^*$. Con objeto de probar la unicidad sea $s'' \in [\frac{1}{2}, 1]$ con $\gamma(s) - \gamma(s'') \in \ker x^*$. Entonces los vectores $\gamma(s'') - \gamma(s')$ y $\gamma(s'') - \gamma(s)$ son linealmente dependientes y por tanto existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(s'') - \gamma(s') = \lambda(\gamma(s'') - \gamma(s)).$$

Si $\lambda = 0$, $\gamma(s'') = \gamma(s')$ y como $\gamma|_{]0,1]}$ es inyectiva, $s'' = s'$. Si $0 < \lambda < 1$, la igualdad

$$(1 - \lambda)\gamma(s'') + \lambda\gamma(s) = \gamma(s')$$

nos permite deducir que $\gamma(s'') = \gamma(s) = \gamma(s')$ y por tanto, $s'' = s'$. Si $\lambda = 1$ entonces $\gamma(s') = \gamma(s)$. Luego, teniendo en cuenta que también $\gamma|_{[0,1[}$ es inyectiva como se deduce de la condición $\gamma(0) = \gamma(1)$ y del carácter inyectivo de $\gamma|_{]0,1]}$, se tiene que $s = 0$ y $s' = 1$ o $s = s' = \frac{1}{2}$. En el primer caso $x^*(\gamma(s'')) = x^*(\gamma(0)) = 1$, luego $\gamma(s'')) = \gamma(0)$ y en consecuencia $s'' = 1 = s'$. En el segundo caso $x^*(\gamma(s'')) = x^*(\gamma(\frac{1}{2})) = -1$, de donde $\gamma(s'')) = \gamma(\frac{1}{2})$ y así $s'' = \frac{1}{2} = s'$. Si $\lambda > 1$, la igualdad

$$\gamma(s) = (1 - \frac{1}{\lambda})\gamma(s'') + \frac{1}{\lambda}\gamma(s')$$

implica $\gamma(s'') = \gamma(s')$ y nuevamente $s'' = s'$. Finalmente si $\lambda < 0$, basta observar que

$$\gamma(s'') = \frac{1}{1-\lambda}\gamma(s') + \frac{-\lambda}{1-\lambda}\gamma(s)$$

para concluir como antes que $s'' = s'$.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que la aplicación $s \mapsto \rho(s)$, de $[0, \frac{1}{2}]$ en $[\frac{1}{2}, 1]$, que acabamos de construir no es continua. Entonces, existe un punto $s \in [0, \frac{1}{2}]$ y una sucesión $\{s_n\}$ de elementos de $[0, \frac{1}{2}]$ convergente a s, tal que $\{\rho(s_n)\}$ converge a un punto β (del intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$), con $\beta \neq \rho(s)$. Como $\gamma(s_n) - \gamma(\rho(s_n)) \in \ker x^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$, la continuidad de γ nos da que $\gamma(s) - \gamma(\beta) \in \ker x^*$, lo que contradice la unicidad de $\rho(s)$.

Es obvio que $\gamma([0, \frac{1}{2}]) \cup (-\gamma([0, \frac{1}{2}])) = S_X$, luego $\gamma([0, \frac{1}{2}]) \cap \ker x^* \neq \emptyset$. Así pues, existe $s_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $\gamma(s_0) \in \ker x^*$. Evidentemente

$$\gamma(s_0) - \gamma(s_0 + \frac{1}{2}) = 2\gamma(s_0) \in \ker x^*,$$

luego $\rho(s_0) = s_0 + \frac{1}{2}$. Para mostrar que s_0 es único, sea $s \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $\gamma(s) \in \ker x^*$. Puesto que $\gamma(s_0) - \gamma(s + \frac{1}{2}) \in \ker x^*$ también se tiene que $\rho(s_0) = s + \frac{1}{2}$, de donde $s = s_0$. Como

$$x^*(\gamma(0)) = -x^*(\gamma(\frac{1}{2})) = 1 \quad \text{y} \quad x^*(\gamma(s_0)) = 0,$$

necesariamente $s_0 \in]0, \frac{1}{2}[$. ■

Finalizamos el capítulo con la caracterización prometida de la propiedad de representación por medias de longitud dos.

Teorema 1.10 *Sea X un espacio normado estrictamente convexo de dimensión 2 y T un espacio topológico compacto de Hausdorff. Son equivalentes:*

i) T *es un* F*-espacio y* $\dim T \leq 1$.

ii) $C(T, X)$ *tiene descomposición polar.*

iii) Todo punto de la bola unidad de $C(T, X)$ *es media de dos puntos extremos.*

Demostración:

En vista de los resultados anteriormente expuestos sólo resta probar que la tercera afirmación implica la primera.

Denotemos por S^1, como es habitual, la esfera unidad del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$. Si $H : \mathbb{R}^2 \to X$ es un isomorfismo entonces la aplicación $h : S^1 \to S_X$ dada por

$$h(z) = \frac{H(z)}{||H(z)||} \text{ , para todo } z \in S^1$$

es un homeomorfismo tal que $h(-z) = -h(z)$, para todo $z \in S^1$. Es pues inmediato que las aplicaciones $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to X$ definidas por

$$\gamma_1(s) = h(\cos(2\pi s), \text{sen}(2\pi s)) \text{ , } \gamma_2(s) = h(\cos(2\pi s + \frac{\pi}{2}), \text{sen}(2\pi s + \frac{\pi}{2}))$$

cumplen las condiciones del Lema 1.9. Para cada $j \in \{1, 2\}$, sea x_j^* un funcional de soporte de B_X en el punto $\gamma_j(0)$ y consideremos la función continua ρ_j, de $[0, \frac{1}{2}]$ en $[\frac{1}{2}, 1]$, que garantiza el citado lema. Notemos por s_j el único elemento del intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ tal que $\gamma_j(s_j) \in \ker x_j^*$. Sabemos que, de hecho, $s_j \in]0, \frac{1}{2}[$ y $\rho_j(s_j) = s_j + \frac{1}{2}$. Sea además $\varphi_j : [0, \frac{1}{2}] \to X$, la aplicación continua dada por

$$\varphi_j(s) = \frac{\gamma_j(s) + \gamma_j(\rho_j(s))}{2} \text{ , para todo } s \in [0, \frac{1}{2}].$$

Claramente,

$$\varphi_j(s_j) = \frac{\gamma_j(s_j) + \gamma_j(\rho_j(s_j))}{2} = \frac{\gamma_j(s_j) + \gamma_j(s_j + \frac{1}{2})}{2} = 0.$$

La continuidad de cada φ_j en s_j, nos proporciona un número real $\delta > 0$ tal que $[s_j - \delta, s_j + \delta] \subseteq [0, \frac{1}{2}]$ y

$$s \in [s_j - \delta, s_j + \delta] \Rightarrow ||\varphi_j(s)|| \leq \frac{1}{2} \quad (j \in \{1, 2\}).$$

Observemos, para su uso posterior, que los funcionales x_1^* y x_2^* son linealmente independientes. En efecto, el único punto de la bola unidad de X en el que x_1^* alcanza el valor 1 es $\gamma_1(0)$. Si $x_1^* = x_2^*$ o $x_1^* = -x_2^*$ entonces también alcanzaría dicho valor en el punto $\gamma_2(0) = \gamma_1(\frac{1}{4}) \neq \gamma_1(0)$ o en el punto $-\gamma_2(0) = \gamma_2(\frac{1}{2}) = \gamma_1(\frac{3}{4}) \neq \gamma_1(0)$.

Sean V_1 y V_2 subconjuntos funcionalmente abiertos y disjuntos de T. Entonces, para $j \in \{1, 2\}$, existe una función continua $f_j : T \to [s_j, s_j + \delta]$ tal que

$$V_j = f_j^{-1}(]s_j, s_j + \delta]).$$

Sea $f : T \to X$ la aplicación definida por

$$f(t) = \varphi_1(f_1(t)) + \varphi_2(f_2(t)), \text{ para todo } t \in T.$$

Evidentemente, f pertenece a la bola unidad de $C(T, X)$ y por hipótesis existen u y v puntos extremos de dicha bola, tales que $f = \frac{1}{2}(u + v)$.

Si $t \in V_1$, entonces $t \notin V_2$ y por tanto $f_2(t) = s_2$. Luego

$$\varphi_2(f_2(t)) = \varphi_2(s_2) = 0,$$

de donde

$$f(t) = \varphi_1(f_1(t)) = \frac{\gamma_1(f_1(t)) + \gamma_1(\rho_1(f_1(t)))}{2}.$$

Observemos que $\varphi_1(f_1(t)) \neq 0$ pues, en caso contrario,

$$\gamma_1(f_1(t)) = -\gamma_1(\rho_1(f_1(t)))$$

y en consecuencia

$$2\gamma_1(f_1(t)) = \gamma_1(f_1(t)) - \gamma_1(\rho_1(f_1(t))),$$

por lo que $\gamma_1(f_1(t)) \in \ker x_1^*$ y necesariamente $f_1(t) = s_1$, lo que no es posible ya que $t \in V_1$. En virtud del Lema 1.8,

$$u(t) = \gamma_1(f_1(t)) \quad \text{o} \quad u(t) = \gamma_1(\rho_1(f_1(t))).$$

Por tanto

$$\min\{||u(t) - \gamma_1(f_1(t))||, ||u(t) - \gamma_1(\rho_1(f_1(t)))||\} = 0.$$

Análogamente si $t \in V_2$,

$$\min\{||u(t) - \gamma_2(f_2(t))||, ||u(t) - \gamma_2(\rho_2(f_2(t)))||\} = 0.$$

Supongamos, para llegar a una contradicción, que $t \in \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$. La continuidad de las funciones que aparecen como primer miembro de las anteriores igualdades nos garantiza que ambas se verifican para t. Puesto que $\overline{V}_1 \subseteq T \backslash V_2$ y $\overline{V}_2 \subseteq T \backslash V_1$, $t \in T \backslash (V_1 \cup V_2)$ y por tanto $f_1(t) = s_1$, $f_2(t) = s_2$. De este modo, las igualdades precedentes se traducen en las que siguen:

$$\min\{||u(t) - \gamma_1(s_1)||, ||u(t) + \gamma_1(s_1)||\} = 0.$$

$$\min\{||u(t) - \gamma_2(s_2)||, ||u(t) + \gamma_2(s_2)||\} = 0.$$

Consecuentemente, $\gamma_1(s_1) = \gamma_2(s_2)$ o $\gamma_1(s_1) = -\gamma_2(s_2)$. En cualquier caso $\ker x_1^* = \ker x_2^*$, y este hecho contradice la independencia lineal de los funcionales x_1^* y x_2^*. ■

En [8], [19] y [54], M.J. Canfell, D. Handelman y A.G. Robertson probaron (independientemente) un caso particular del teorema anterior. Concretamente el correspondiente al espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 2

Una nueva desigualdad en espacios normados

Las técnicas que aplicaremos en el transcurso de los próximos capítulos requieren de una desigualdad, válida en cualquier espacio normado de dimensión dos, cuya demostración es bastante laboriosa. Haciendo un uso adecuado de la misma sobre los subespacios bidimensionales de un cierto espacio normado, obtendremos resultados sobre retracciones en espacios de dimensión infinita y sobre la estructura extremal de la bola unidad en espacios de funciones uniformemente continuas.

Dedicamos el presente capítulo a la obtención de la desigualdad mencionada. Los argumentos necesarios tienen un alto y a nuestro juicio interesante contenido geométrico. Si se tiene presente la idea gráfica que subyace en cada paso, la prueba puede resultar atractiva. Esperamos que así sea en el caso de quien en este momento pueda estar leyendo estas líneas.

Digamos finalmente que la desigualdad que vamos a estudiar podría tener utilidad en otros contextos y de hecho da lugar a una noción relacionada con la convexidad uniforme, aunque considerablemente más débil que comentaremos más adelante.

2.1 Orientación y distancias

Con objeto de poner a punto los ingredientes fundamentales que usaremos en la demostración de la desigualdad, introduciremos en esta sección una relación de orden natural en cualquier semicircunferencia de un espacio normado real X_0 de dimensión dos. Con tal propósito, sea a un elemento no nulo de X_0 y f un funcional de norma uno tal que $\ker f = \mathrm{lin}\{a\}$.

Dado un número real positivo r consideremos el conjunto

$$S(r, f) = \{x \in X_0 : ||x|| = r, \ f(x) \geq 0\}$$

que como puede apreciarse, corresponde a una semicircunferencia centrada en el origen y de radio r. Sea a^* el funcional de soporte en el punto $\frac{a}{||a||}$, es decir, $a^* \in S_{X_0^*}$, $a^*(\frac{a}{||a||}) = 1$.

Veamos en primer lugar que si x e y son dos elementos diferentes del conjunto $S(r, f)$ tales que $a^*(x) = a^*(y)$, entonces

$$a^*(x) = a^*(y) = r \text{ ó } a^*(x) = a^*(y) = -r.$$

En efecto, los funcionales f y a^* tienen distinto núcleo y por tanto son linealmente independientes. En consecuencia separan los puntos de X_0. Dado que $a^*(x) = a^*(y)$, se tiene necesariamente que $f(x) \neq f(y)$ y podemos suponer sin perder generalidad que $f(x) < f(y)$. Sea $\lambda = a^*(x) = a^*(y)$. Evidentemente $|\lambda| \leq r$. Aplicando los funcionales f y a^*, se comprueba inmediatamente que $x = \frac{f(x)}{f(y)} y + (1 - \frac{f(x)}{f(y)}) \lambda \frac{a}{||a||}$. Si fuese $|\lambda| < r$, la igualdad anterior permitiría deducir que $||x|| < r$ en contra de lo supuesto. Por tanto, $|\lambda| = r$ y tenemos lo deseado.

Dados $x, y \in S(r, f)$ con $x \neq y$, escribiremos $x \prec y$ si se verifica una de las tres afirmaciones (mutuamente excluyentes) que siguen:

$$\begin{aligned} &i)\ a^*(y) = a^*(x) = r \quad \text{y} \quad f(x) < f(y) \\ &ii)\ a^*(y) < a^*(x) \\ &iii)\ a^*(y) = a^*(x) = -r \quad \text{y} \quad f(x) > f(y). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Finalmente si $x, y \in S(r, f)$ (no necesariamente distintos), escribiremos $x \preccurlyeq y$ si $x = y$ o $x \prec y$ en el sentido precedente.

A continuación comprobaremos algunos hechos sencillos que se derivan de la definición anterior:

Proposición 2.1 *Sean a, r, f y $S(r, f)$ como en la discusión precedente y consideremos la relación binaria $\preccurlyeq$ que acabamos de definir. Entonces $\preccurlyeq$ es una relación de orden total en $S(r, f)$ que cumple las siguientes afirmaciones:*

i) No se altera si reemplaza a por ta, con $t > 0$. Sin embargo, cambia de sentido al sustituir a por ta, con $t < 0$.

ii) Permanece invariante si se sustituye a^* por cualquier otro funcional de soporte en el punto $\frac{a}{||a||}$.

iii) $r\frac{a}{||a||} \preccurlyeq x \preccurlyeq -r\frac{a}{||a||}$, para todo $x \in S(r, f)$.

Demostración:

De la propia definición se deduce inmediatamente que $\preccurlyeq$ es una relación de orden total.

i) Para $t > 0$, basta tener en cuenta que $\frac{ta}{||ta||} = \frac{a}{||a||}$. Por otra parte, si sustituimos a por ta, con $t < 0$, se tiene que $\frac{ta}{||ta||} = -\frac{a}{||a||}$ y si a^* es un funcional de soporte en el punto $\frac{a}{||a||}$, consideramos $-a^*$ para tener un funcional de soporte en $\frac{ta}{||ta||}$. Denotemos por $\preccurlyeq^-$ la relación correspondiente. Dados $x, y \in S(r, f)$, es inmediato que $x \preccurlyeq y$ si, y sólo si, $y \preccurlyeq^- x$.

Para probar *ii),* sean a^* y b^* funcionales de soporte en el punto $\frac{a}{||a||}$ y denotemos por $\preccurlyeq_{a^*}$ y $\preccurlyeq_{b^*}$ las correspondientes relaciones. Consideremos dos elementos diferentes $x, y \in S(r, f)$ tales que $x \preccurlyeq_{a^*} y$.

Supondremos en primer lugar que $f(x) < f(y)$. Si definimos

$$\alpha = \frac{f(y)a^*(x) - f(x)a^*(y)}{f(y) - f(x)},$$

se comprueba inmediatamente, aplicando los funcionales f y a^*, que

$$x = \frac{f(x)}{f(y)}\, y + (1 - \frac{f(x)}{f(y)})\, \alpha\, \frac{a}{\|a\|}\, . \tag{2.2}$$

De ello se deduce en particular que $|\alpha| \geq r$ (en caso contrario, la igualdad precedente llevaría a la desigualdad $\|x\| < r$ que contradice la hipótesis). La alternativa $a^*(y) = a^*(x) = -r$ no es compatible con las condiciones $x \preccurlyeq_{a^*} y$ y $f(x) < f(y)$, luego $a^*(x) = a^*(y) = r$ ó $a^*(y) < a^*(x)$.

En ambos casos se tiene que $\alpha \geq r$. De hecho si $a^*(x) = a^*(y) = r$, de la propia definición de α se deduce que $\alpha = r$. Por otra parte si $a^*(y) < a^*(x)$, la condición $\alpha \leq -r$ nos conduce a una contradicción sin más que aplicar el funcional a^* en la igualdad (2.2):

$$a^*(x) = \frac{f(x)}{f(y)}\, a^*(y) + (1 - \frac{f(x)}{f(y)})\, \alpha \leq \frac{f(x)}{f(y)}\, a^*(y) + (1 - \frac{f(x)}{f(y)})\, a^*(y) = a^*(y).$$

Por tanto $\alpha \geq r$ y en consecuencia, haciendo uso una vez más de (2.2), se obtiene que $b^*(x) \geq b^*(y)$:

$$b^*(x) = \frac{f(x)}{f(y)}\, b^*(y) + (1 - \frac{f(x)}{f(y)})\, \alpha \geq \frac{f(x)}{f(y)}\, b^*(y) + (1 - \frac{f(x)}{f(y)})\, b^*(y) = b^*(y).$$

Si esta desigualdad se verifica de forma estricta, $b^*(y) < b^*(x)$, se tiene automáticamente que $x \preccurlyeq_{b^*} y$. Por otro lado si $b^*(x) = b^*(y)$, aplicando b^*

en (2.2) se obtiene que $(1 - \frac{f(x)}{f(y)})b^*(x) = (1 - \frac{f(x)}{f(y)})\alpha$ y como $1 - \frac{f(x)}{f(y)} \neq 0$, $b^*(x) = \alpha \geq r$. Así pues, $r = b^*(x) = b^*(y)$ y $f(x) < f(y)$ por lo que $x \preccurlyeq_{b^*} y$.

Supongamos ahora que $f(x) = f(y)$. Puesto que por hipótesis $x \preccurlyeq_{a^*} y$, se tiene claramente que $a^*(y) < a^*(x)$. Por otra parte $x - y \in \ker f = \operatorname{lin}\{a\}$ y en consecuencia, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x - y = \lambda a$. Por tanto

$$b^*(x-y) = \lambda \|a\| = a^*(x-y) > 0.$$

Luego $b^*(y) < b^*(x)$ y así $x \preccurlyeq_{b^*} y$.

Finalmente consideremos la situación $f(x) > f(y)$. Como $x \preccurlyeq_{a^*} y$, se tiene entonces que $a^*(y) < a^*(x)$ ó $a^*(x) = a^*(y) = -r$. En cualquiera de los dos casos $y \preccurlyeq_{-a^*} x$ y haciendo uso de lo ya probado, se obtiene que $y \preccurlyeq_{-b^*} x$ o equivalentemente $x \preccurlyeq_{b^*} y$.

iii) Como $a^*(-r\frac{a}{||a||}) = -r < r = a^*(r\frac{a}{||a||})$, se tiene que $r\frac{a}{||a||} \prec -r\frac{a}{||a||}$. Consideremos $x \in S(r, f)$. Si $f(x) = 0$ entonces $x = r\frac{a}{||a||}$ ó $x = -r\frac{a}{||a||}$ y teniendo en cuenta lo anterior es obvio que $r\frac{a}{||a||} \preccurlyeq x \preccurlyeq -r\frac{a}{||a||}$. Supondremos ahora que $f(x) > 0$. Si $|a^*(x)| < r$ entonces $a^*(-r\frac{a}{||a||}) < a^*(x) < a^*(r\frac{a}{||a||})$ y por tanto $r\frac{a}{||a||} \prec x \prec -r\frac{a}{||a||}$. Por otra parte si $a^*(x) = r$ tenemos

$$a^*(r\tfrac{a}{||a||}) = a^*(x) = r \quad y \quad f(x) > f(r\frac{a}{||a||}).$$

Además $a^*(x) > a^*(-r\frac{a}{||a||})$. En consecuencia $r\frac{a}{||a||} \prec x \prec -r\frac{a}{||a||}$. Finalmente si $a^*(x) = -r$, entonces

$$a^*(-r\frac{a}{||a||}) = a^*(x) = -r, \quad f(x) > f(-r\frac{a}{||a||}) \quad y \quad a^*(x) < a^*(r\frac{a}{||a||}),$$

con lo que $r\frac{a}{||a||} \prec x \prec -r\frac{a}{||a||}$. ∎

El resultado que probaremos a continuación responde fielmente a la idea geométrica que expresa la siguiente figura:

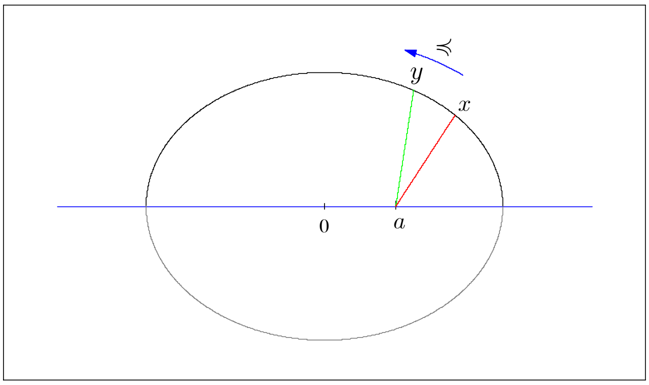


Figura 2.1

La función $x \mapsto ||x-a||$, de $S(r,f)$ en $\mathbb{R}$, es creciente si se recorre la semicircunferencia en sentido contrario al de las agujas del reloj, es decir, si en $S(r,f)$ consideramos la relación de orden $\preccurlyeq$ anteriormente definida.

Pese a su carácter intuitivo, la comprobación analítica no es en absoluto trivial.

Proposición 2.2 *Sean $x, y \in S(r,f)$ con $x \preccurlyeq y$. Entonces*

$$||x-a|| \leq ||y-a||.$$

Demostración:

Nada hay que probar si $x = y$. Por tanto, supondremos $x \neq y$.

Si $x = r\frac{a}{||a||}$ es claro que $||x-a|| = |r - ||a||| \leq ||y-a||$. Del mismo modo, si $y = -r\frac{a}{||a||}$ entonces $||x-a|| \leq r + ||a|| = ||y-a||$. Así pues, nos centraremos en la situación $r\frac{a}{||a||} \prec x \prec y \prec -r\frac{a}{||a||}$. Esto implica $f(x) > 0$ y $f(y) > 0$.

Supongamos en primer lugar que $f(x) = f(y)$. En tal caso, se tiene necesariamente que $a^*(y) < a^*(x)$ y como $x - y \in \ker f = \operatorname{lin}\{a\}$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x - y = \lambda a$. Por tanto $\lambda ||a|| = a^*(x) - a^*(y) > 0$ y en consecuencia $\lambda > 0$. Es inmediato que $y = \frac{\lambda}{1+\lambda}(y - a) + \frac{1}{1+\lambda}x$. Luego $||y - a|| \geq r$. Si fuese $||x - a|| \leq r$ ya tendríamos lo deseado. Supongamos pues $||x - a|| > r$. Teniendo en cuenta que $x - a = \frac{1}{1+\lambda}(y - a) + \frac{\lambda}{1+\lambda}x$, deducimos que

$$||x - a|| \leq \tfrac{1}{1+\lambda}||y - a|| + \tfrac{\lambda}{1+\lambda}r < \tfrac{1}{1+\lambda}||y - a|| + \tfrac{\lambda}{1+\lambda}||x - a||$$

y por tanto $||y-a|| \geq ||x-a||$ (en caso contrario las desigualdades anteriores implicarían que $||x - a|| < ||x - a||$).

A continuación consideraremos el caso $f(x) < f(y)$. Definimos el punto

$$P = \frac{f(y)}{f(y) - f(x)}(x - \frac{f(x)}{f(y)}y).$$

Puesto que $P \in \ker f$, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $P = \mu\frac{a}{||a||}$. Es claro además que $x = \frac{f(x)}{f(y)}y + (1 - \frac{f(x)}{f(y)})P$ y en consecuencia $||P|| \geq r$ (ya que $||x|| = ||y|| = r$), esto es $|\mu| \geq r$. Obsérvese también que $a^*(P) = \mu$. Dado que $f(x) < f(y)$ y $x \prec y$, se tiene necesariamente $a^*(y) = a^*(x) = r$ ó $a^*(y) < a^*(x)$. En el primer caso $\mu = a^*(P) = r$ y en el segundo veremos inmediatamente que $\mu \geq r$. Si fuese $\mu \leq -r$ tendríamos en particular que $\mu \leq a^*(x)$, pero entonces

$$\begin{aligned} a^*(x) &= \tfrac{f(x)}{f(y)}a^*(y) + (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)})a^*(P) \\ &= \tfrac{f(x)}{f(y)}a^*(y) + (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)})\mu \\ &< \tfrac{f(x)}{f(y)}a^*(x) + (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)})a^*(x) = a^*(x). \end{aligned}$$

Así pues, en cualquier caso $\mu \geq r$. Si $\mu = ||a||$ entonces $P = a$ y por tanto x pertenece al segmento $[a, y]$. En consecuencia $||y - a|| = ||y - x|| + ||x - a||$, de donde $||y - a|| > ||x - a||$. Supondremos ahora que $\mu \neq ||a||$. Sea $g \in S_{X_0^*}$ tal que $g(x) = g(y) > 0$ (Puesto que el conjunto $\{x, y - x\}$ es una base de X_0, basta considerar $g = \frac{h}{\|h\|} \in S_{X_0^*}$ donde $h(\lambda x + \beta(y-x)) = \lambda$, para cualesquiera $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$).

Según lo anterior es obvio que

$$\frac{\mu}{||a||} g(a) = g(P) = g(x) = g(y).$$

En particular $g(a) > 0$ y los funcionales f y g separan los puntos de X_0 (nótese que son linealmente independientes pues $\ker f \neq \ker g$). Consideremos los puntos

$$\begin{aligned} P_1 &= \tfrac{\mu}{\mu - ||a||}(x-a) \quad \text{y} \\ P_2 &= \tfrac{\mu}{\mu - ||a||}(y-a). \end{aligned}$$

Evidentemente,

$$\begin{aligned} g(P_1) &= g(P_2) = \tfrac{\mu}{\mu - ||a||}(g(P) - g(a)) \\ &= \tfrac{\mu}{\mu - ||a||}(\tfrac{\mu}{||a||} - 1)g(a) = \tfrac{\mu}{||a||} g(a) = g(P). \end{aligned}$$

Supongamos que $\mu < ||a||$, entonces $\frac{\mu}{\mu - ||a||} < 0$ y es claro que

$$\tfrac{\mu}{\mu - ||a||} f(y) < \tfrac{\mu}{\mu - ||a||} f(x) < f(x) < f(y),$$

esto es

$$f(P_2) < f(P_1) < f(x) < f(y).$$

Aplicando los funcionales f y g, se comprueba inmediatamente que

$$x = \tfrac{f(y)-f(x)}{f(y)-f(P_1)}\, P_1 + \tfrac{f(x)-f(P_1)}{f(y)-f(P_1)}\, y \quad \text{y}$$

$$P_1 = \tfrac{f(x)-f(P_1)}{f(x)-f(P_2)}\, P_2 + \tfrac{f(P_1)-f(P_2)}{f(x)-f(P_2)}\, x\,.$$

La primera igualdad garantiza que $||P_1|| \geq r$ $(||x|| = ||y|| = r)$. Por tanto si fuese $||P_2|| < ||P_1||$, la segunda igualdad nos conduciría a una contradicción $(||P_1|| < ||P_1||)$. Luego $||P_2|| \geq ||P_1||$, o equivalentemente

$$||y - a|| \geq ||x - a||.$$

Una idea geométrica de la argumentación anterior puede apreciarse en el siguiente dibujo:

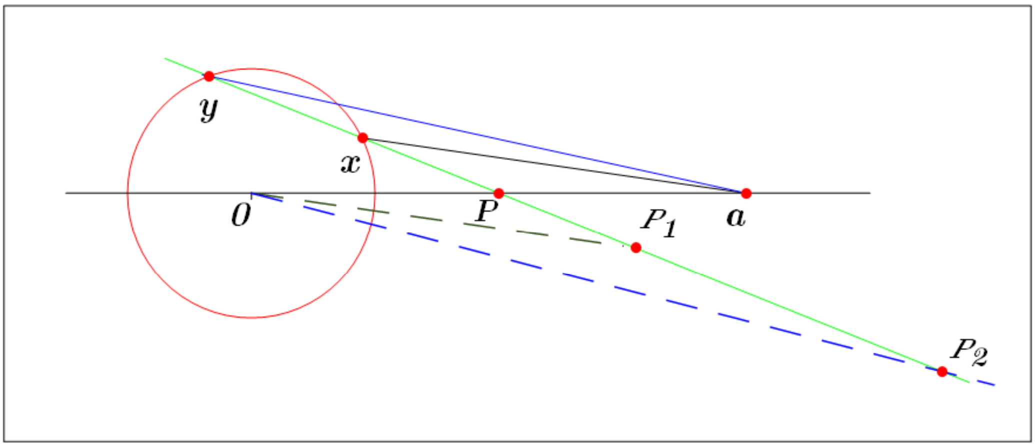


Figura 2.2

Consideremos ahora el caso $\mu > ||a||$. En tal situación

$$\begin{aligned} f(x) &< f(y) < \tfrac{\mu}{\mu - ||a||} f(y), \\ f(x) &< \tfrac{\mu}{\mu - ||a||} f(x) < \tfrac{\mu}{\mu - ||a||} f(y), \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} f(x) &< f(y) < f(P_2) \quad y \\ f(x) &< f(P_1) < f(P_2). \end{aligned}$$

Además

$$y \;=\; \tfrac{f(P_2) - f(y)}{f(P_2) - f(x)}\, x + \tfrac{f(y) - f(x)}{f(P_2) - f(x)}\, P_2 \quad \text{y}$$

$$P_1 \quad = \quad \frac{f(P_2)-f(P_1)}{f(P_2)-f(x)}\, x + \frac{f(P_1)-f(x)}{f(P_2)-f(x)}\, P_2 \,.$$

Luego como consecuencia de la primera igualdad, $||P_2|| \geq r$.

Si $||P_1|| \leq r$, tendríamos directamente $||P_2|| \geq ||P_1||$ y por tanto

$$||y-a|| \geq ||x-a||.$$

Una idea geométrica de esta situación podría ser la siguiente:

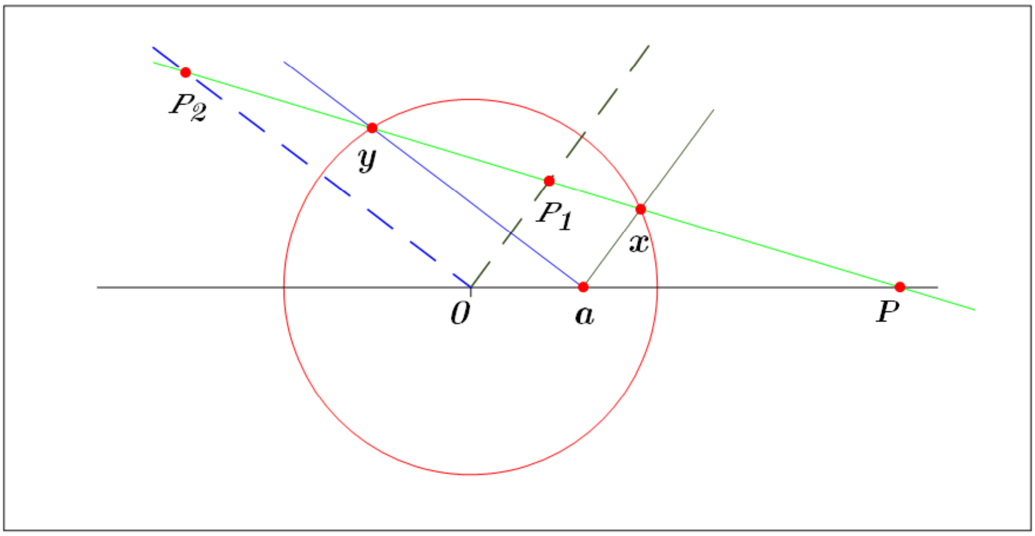


Figura 2.3

Si $||P_1|| > r$ $(= ||x||)$, la segunda igualdad garantiza que $||P_2|| > ||P_1||$, esto es $||y-a|| > ||x-a||$.

Supongamos para acabar la demostración, que $f(x) > f(y)$. Consideramos ahora el punto

$$Q = \frac{f(x)}{f(x)-f(y)}\,(y - \frac{f(y)}{f(x)}x),$$

que como puede apreciarse pertenece al núcleo de f. En consecuencia, existe

$\nu \in \mathbb{R}$ tal que $Q = \nu \frac{a}{||a||}$. Evidentemente $\nu = a^*(Q)$ y además

$$y = \frac{f(y)}{f(x)}x + (1 - \frac{f(y)}{f(x)})Q.$$

Luego $|\nu| = ||Q|| \geq r$ y, de hecho, comprobaremos a continuación que $\nu \leq -r$. Puesto que $x \prec y$ y $f(x) > f(y)$, se tiene necesariamente

$$a^*(y) < a^*(x) \quad \text{ó} \quad a^*(y) = a^*(x) = -r.$$

En el segundo caso $\nu = a^*(Q) = -r$ y en el primero

$$a^*(y) = \tfrac{f(y)}{f(x)}a^*(x) + (1 - \tfrac{f(y)}{f(x)})a^*(Q) > \tfrac{f(y)}{f(x)}a^*(y) + (1 - \tfrac{f(y)}{f(x)})a^*(Q),$$

con lo que la única salida no contradictoria es $a^*(Q) < a^*(y)$. Por tanto $\nu < a^*(y) \leq r$ y teniendo en cuenta que $|\nu| \geq r$, concluímos que $\nu \leq -r$. Como antes, sea g un funcional de norma uno tal que $g(x) = g(y) > 0$.

Claramente

$$\frac{\nu}{||a||}g(a) = g(Q) = g(x) = g(y)$$

y consecuentemente $g(a) < 0$. En particular f y g separan los puntos de X_0. Sean

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\nu}{\nu - ||a||}(x - a) \quad \text{y} \\ Q_2 &= \frac{\nu}{\nu - ||a||}(y - a). \end{aligned}$$

Evidentemente

$$\begin{aligned} \tfrac{\nu}{\nu - ||a||}f(y) &= \tfrac{-\nu}{-\nu + ||a||}f(y) < f(y) < f(x), \\ \tfrac{\nu}{\nu - ||a||}f(y) &< \tfrac{\nu}{\nu - ||a||}f(x) < f(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} f(Q_2) &< f(y) < f(x) \quad \text{y} \\ f(Q_2) &< f(Q_1) < f(x). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
y &= \tfrac{f(x)-f(y)}{f(x)-f(Q_2)}\, Q_2 + \tfrac{f(y)-f(Q_2)}{f(x)-f(Q_2)}\, x \quad \text{y} \\
Q_1 &= \tfrac{f(x)-f(Q_1)}{f(x)-f(Q_2)}\, Q_2 + \tfrac{f(Q_1)-f(Q_2)}{f(x)-f(Q_2)}\, x.
\end{aligned}
$$

La primera igualdad muestra que $||Q_2|| \geq r$. Por tanto, podemos suponer (ya que en caso contrario habríamos terminado) que $||Q_1|| > r$. Dado que $||x|| = r < ||Q_1||$, la segunda igualdad implica que $||Q_2|| > ||Q_1||$, esto es, $||y - a|| > ||x - a||$. El siguiente dibujo aclara esta situación:

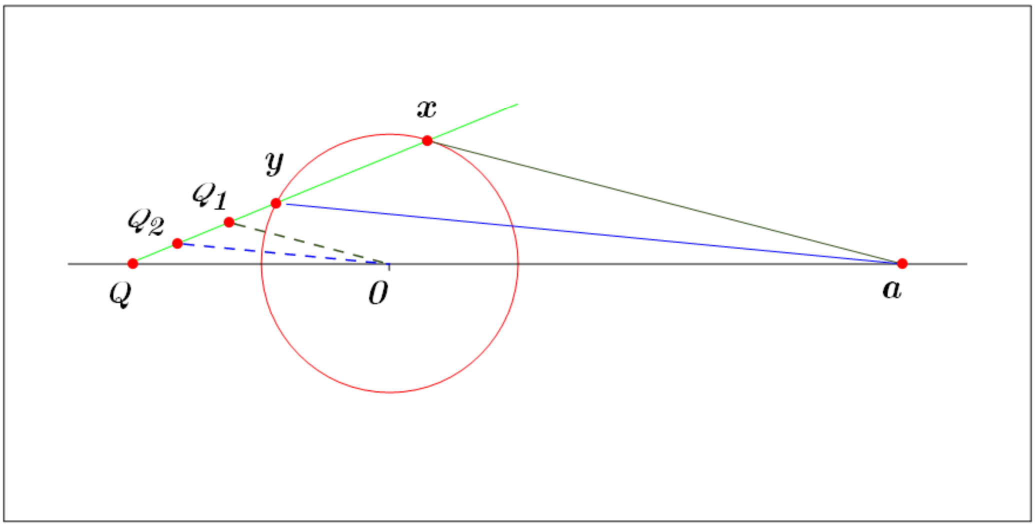


Figura 2.4

■

2.2 Desigualdad de la semicircunferencia

Con el objeto de conectar con el ambiente en el que nos vamos a mover en los capítulos que siguen, comenzamos con algunas observaciones previas sobre los espacios uniformemente convexos.

Recordemos en primer lugar que un espacio normado X es **uniformemente convexo** si para cualesquiera dos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de B_X tales que $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$, se tiene que $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$. Así pues, es claro que cada espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo.

Por citar algunos ejemplos, los espacios L_p con $1<p<\infty$ son uniformemente convexos. Por otra parte, todo espacio normado finito-dimensional estrictamente convexo es uniformemente convexo. Sin embargo, los espacios $(l_1,\|\cdot\|_1), (c_0,\|\cdot\|_\infty)$ no son ni tan siquiera estrictamente convexos. Este último hecho es fácil de comprobar sin más que tomar $\|e_1+e_2\|_1 = 2$ y $\|(e_1+e_2)+(e_1-e_2)\|_\infty = 2$.

Por otro lado, de acuerdo con la notación de la sección precedente, sea X_0 un espacio normado real de dimensión dos, a un elemento no nulo de X_0, f un funcional de norma uno tal que $\ker f = \operatorname{lin}\{a\}$ y a^* un funcional de soporte en el punto $\frac{a}{||a||}$. Consideremos además la semicircunferencia

$$S(r,f)=\{x\in X_0 : ||x||=r,\ f(x)\geq 0\}.$$

La Proposición 2.2 afirma que la aplicación $x\mapsto\|x-a\|$, de $S(r,f)$ en $\mathbb{R}$, es creciente con respecto a la relación de orden $\preccurlyeq$ que inducen en $S(r,f)$ los funcionales f y a^*. Así pues, si $x,y\in S(r,f)$ y $x\preccurlyeq y$, se tiene que $||y-a||-||x-a||\geq 0$. Centrándonos en el caso que más nos interesa ($r=1$), nos proponemos analizar con mayor profundidad el comportamiento de la aplicación $x\mapsto\|x-a\|$. Concretamente, probaremos la existencia de una constante $\rho>0$ tal que

$$x,y\in S(1,f),\ x\preccurlyeq y \Rightarrow ||y-a||-||x-a||\geq \rho(1-\tfrac{||x+y||}{2}).$$

Un hecho mucho menos intuitivo pero más útil que el mero crecimiento de la aplicación citada. Podemos incluso prescindir de la relación de orden y enunciar el resultado en los siguientes términos:

$$x, y \in S_{X_0},\ f(x) \geq 0,\ f(y) \geq 0 \Rightarrow |\ ||y-a|| - ||x-a||\ | \geq \rho(1 - \tfrac{||x+y||}{2}).$$

Es fácil adivinar que la desigualdad mostrará su mejor rendimiento bajo una adecuada geometría del espacio ambiente. Piénsese, por ejemplo, en la posibilidad de que X_0 sea uniformemente convexo. O incluso sin ir tan lejos, supóngase que X_0 es estrictamente convexo. En este último caso, la aplicación $x \mapsto \|x-a\|$, de $S(1,f)$ en $\mathbb{R}$, es de hecho estrictamente creciente. En efecto, dados $x, y \in S(1,f)$ con $x \prec y$, la convexidad estricta de X_0 implica que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$ y, en consecuencia,

$$||y-a|| - ||x-a|| \geq \rho(1 - \tfrac{||x+y||}{2}) > 0,$$

de donde $||y-a|| > ||x-a||$.

A continuación probaremos un resultado elemental que proporciona una cota inferior de la distancia de un punto de la esfera unidad de un espacio normado al subespacio engendrado por cualquier otro punto de la esfera.

Proposición 2.3 *Sea X un espacio normado y $x_0, v \in S_X$. Entonces*

$$d(v, \operatorname{lin}\{x_0\}) \geq \tfrac{1}{2} \min\{||v-x_0||, ||v+x_0||\}.$$

Demostración:

Consideremos un número real t tal que $||v-tx_0|| = d(v, \operatorname{lin}\{x_0\})$. Si $t \geq 0$, se tiene que $||v-tx_0|| \geq |1-t| = ||x_0 - tx_0||$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\min\{||v-x_0||, ||v+x_0||\} &\leq ||v-x_0|| \\
&\leq ||v-tx_0|| + ||tx_0 - x_0|| \leq 2\,||v-tx_0|| \\
&= 2\,d(v, \operatorname{lin}\{x_0\}).
\end{aligned}$$

Si $t < 0$, $||v - tx_0|| \geq |1 + t| = ||x_0 + tx_0||$. Luego, también en este caso,

$$\min\{||v - x_0||, ||v + x_0||\} \leq ||v + x_0||$$

$$\leq ||v - tx_0|| + ||tx_0 + x_0|| \leq 2||v - tx_0|| = 2d(v, \operatorname{lin}\{x_0\}). \quad \blacksquare$$

Observemos que incluso en el caso no trivial $v \neq x_0$, la igualdad es perfectamente posible en el resultado anterior. Para ponerlo de manifiesto, considérese por ejemplo $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $x_0 = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$.

En el siguiente enunciado destacamos un caso especial del resultado principal de esta sección. Como veremos más adelante, el caso general podrá reducirse a esta situación. Nótese que se trata de un hecho que no requiere restricción alguna sobre la dimensión del espacio en cuestión.

Lema 2.4 *Sea X un espacio normado, $a \in X \backslash \{0\}$ y $x \in \{\frac{a}{||a||}, -\frac{a}{||a||}\}$. Entonces*

$$|\, ||y - a|| - ||x - a||\, | \geq 2\min\{1, ||a||\}\,(1 - \tfrac{||x+y||}{2}), \ \textit{para cada } y \in S_X.$$

Demostración:

Sea $y \in S_X$ y supongamos en primer lugar que $x = \frac{a}{||a||}$. Es claro que

$$||y - a|| \geq |\ 1 - ||a||\ | = ||x - a||.$$

En esta situación distinguiremos los casos $||a|| \geq 1$ y $||a|| < 1$. Si $||a|| \geq 1$, la desigualdad que tenemos que probar es $||y - a|| - ||a|| + 1 \geq 2 - ||x + y||$, esto es,

$$||y - a|| + ||x + y|| \geq 1 + ||a||,$$

lo cual es cierto como muestra el argumento que sigue:

$$1 + ||a|| = || - a - \tfrac{a}{||a||}|| = ||y - a - y - x|| \leq ||y - a|| + ||x + y||.$$

En el caso $||a|| < 1$, tenemos que demostrar que

$$||y-a|| - 1 + ||a|| \geq 2||a|| - ||a||\,||\tfrac{a}{||a||} + y||,$$

equivalentemente $||y-a|| + ||\,a + ||a||y\,|| \geq 1 + ||a||$. En efecto,

$$1 + ||a|| = ||(1+||a||)y|| = ||\,y - a + a + ||a||y\,|| \leq ||y-a|| + ||\,a + ||a||y\,||.$$

Supongamos ahora que $x = -\frac{a}{||a||}$ y sea $\eta = \min\{1, ||a||\}$. Obviamente

$$||x-a|| = 1 + ||a|| \geq ||y-a||$$

y la desigualdad que tenemos que comprobar es

$$1 + ||a|| - ||y-a|| \geq 2\eta\,(1 - \tfrac{1}{2}\,||\tfrac{-a}{||a||} + y||),$$

esto es, $1 + ||a|| - 2\eta \geq ||y-a|| - ||\eta y - \frac{\eta}{||a||}a||$. Para concluir, observemos que

$$\begin{aligned} ||y-a|| - ||\eta y - \tfrac{\eta}{||a||}a|| &\leq ||y - a - \eta y + \tfrac{\eta}{||a||}a|| \\ &= ||(1-\eta)y + (\tfrac{\eta}{||a||} - 1)a|| \leq 1 - \eta + |\,\eta - ||a||\,| \\ &= 1 + ||a|| - 2\eta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La desigualdad que pretendemos obtener en este capítulo requiere aún del siguiente resultado:

Lema 2.5 *Sea X_0 un espacio normado real de dimensión dos, $a \in X_0 \backslash \{0\}$, $f \in X_0^*$ con $||f|| = 1$ y $\ker f = \mathrm{lin}\,\{a\}$. Consideremos $x, y \in S_{X_0}$ tales que $f(y) > f(x) > 0$ y sean $P = \frac{f(y)}{f(y)-f(x)}\,(x - \frac{f(x)}{f(y)}y)$ y $d = (1 - ||x-a||)x$. Supongamos que $P = \mu\frac{a}{||a||}$, con $\mu \leq -1$. Entonces $||y-d|| \geq ||y-a||$.*

Demostración:

Nótese en primer lugar que el punto P pertenece al núcleo de f y por tanto se expresa en la forma

$$P = \mu \frac{a}{||a||}, \text{ con } \mu \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |\mu| \geq 1$$

(pues $x = \frac{f(x)}{f(y)} y + (1 - \frac{f(x)}{f(y)}) P$ y $||x|| = ||y|| = 1$). La condición $\mu \leq -1$ que hemos supuesto es una de las dos alternativas que se desprenden de la desigualdad $|\mu| \geq 1$.

Sea $g \in X_0^*$ con $||g|| = 1$ y $g(x) = g(y) > 0$. Obviamente

$$\tfrac{\mu}{||a||} g(a) = g(P) = g(x) = g(y)$$

y por tanto $g(a) < 0$.

Consideremos $z = a - x$, $w = d - x$, $a_0 = y - x$ y $r = ||x - a||$. Es claro que $||w|| = r = ||z||$. Además,

$$||z - a_0|| = ||y - a|| \quad \text{y} \quad ||w - a_0|| = ||y - d||.$$

Por tanto, nuestro objetivo es probar que $||w - a_0|| \geq ||z - a_0||$. Para ello, sea a_0^* un funcional de soporte en el punto $\frac{a_0}{||a_0||}$ y $f_0 = -g$. Evidentemente

$$\begin{aligned}
\ker f_0 &= \operatorname{lin}\{a_0\}, \\
f_0(z) &= -g(z) = -g(a - x) = g(x) - g(a) > 0, \\
f_0(w) &= -g(w) = -g(d - x) \\
&= g(x) - g(d) = g(x) - (1 - ||x - a||) g(x) \\
&= ||x - a|| g(x) > 0.
\end{aligned}$$

Así pues, en virtud de la Proposición 2.2, todo se reduce a probar que $z \preccurlyeq w$, siendo $\preccurlyeq$ la relación de orden en $S(r, f_0)$ determinada por los funcionales f_0 y a_0^*.

Supongamos en primer lugar que $a_0^*(z) = a_0^*(w)$ y observemos que en tal caso $a_0^*(z) = r = a_0^*(w)$. Si fuese $a_0^*(z) = -r = a_0^*(w)$, tendríamos en particular

$$-r = a_0^*(w) = -||x-a||a_0^*(x) = -ra_0^*(x)$$

es decir, $a_0^*(x) = 1$.

Como $a_0^*(y-x) = ||y-x|| > 0$, deduciríamos que $a_0^*(y) > 1$ lo cual es una contradicción. Bajo la condición $a_0^*(z) = a_0^*(w)$, también se tiene $f_0(z) \neq f_0(w)$. En efecto, si se cumpliese la igualdad $f_0(z) = f_0(w)$ se tendría $z = w$ ya que a_0^* y f_0 separan los puntos de X_0. Luego $a = d$ y por tanto $g(a) = (1 - ||x-a||)g(x)$. En particular $1 - ||x-a|| \neq 0$ y como

$$0 = f(a) = f(d) = (1 - ||x-a||)f(x),$$

concluiríamos que $f(x) = 0$ en contra de lo supuesto.

Sea ahora $P_1 = \frac{\mu}{\mu - ||a||}(x-a)$ y observemos que

$$f(P_1) = \frac{-\mu}{-\mu + ||a||} f(x) < f(x) < f(y).$$

Además, teniendo en cuenta que f y g también separan los puntos de X_0, se comprueba fácilmente que

$$x = \tfrac{f(y)-f(x)}{f(y)-f(P_1)} P_1 + \tfrac{f(x)-f(P_1)}{f(y)-f(P_1)} y$$

por lo que $||P_1|| \geq 1$. Equivalentemente $\frac{\mu - ||a||}{||x-a||} \geq \mu$ y como $g(a) < 0$, $\frac{\mu-||a||}{||x-a||} g(a) \leq \mu g(a)$. Tenemos pues,

$$\begin{aligned}
g(\tfrac{x-a}{||x-a||}) &= \tfrac{1}{||x-a||}(g(x) - g(a)) \\
&= \tfrac{1}{||x-a||}(\tfrac{\mu}{||a||} - 1) g(a) = \tfrac{1}{||a||} \tfrac{\mu - ||a||}{||x-a||} g(a) \\
&\leq \tfrac{1}{||a||} \mu g(a) = g(P) = g(x).
\end{aligned}$$

La desigualdad $g(\frac{x-a}{||x-a||}) \leq g(x)$ que acabamos de probar, es claramente equivalente a la desigualdad $f_0(z) \leq f_0(w)$. Por tanto, $f_0(z) < f_0(w)$ y así $z \prec w$.

Sólo nos queda analizar el caso $a_0^*(z) \neq a_0^*(w)$. Bajo tal condición todo se reduce a probar que $a_0^*(w) \leq a_0^*(z)$ pues, de este modo, $a_0^*(w) < a_0^*(z)$ y así $z \prec w$.

Es obvio que

$$a_0^*(w) \leq a_0^*(z) \Leftrightarrow -||x-a||a_0^*(x) \leq a_0^*(a-x) \Leftrightarrow a_0^*(\tfrac{x-a}{||x-a||}) \leq a_0^*(x).$$

Demostraremos pues para terminar que $a_0^*(\frac{x-a}{||x-a||}) \leq a_0^*(x)$. Anteriormente hemos comprobado que $g(\frac{x-a}{||x-a||}) \leq g(x)$. Supongamos primero que $g(\frac{x-a}{||x-a||}) = g(x)$. Entonces $\frac{1}{||a||}\frac{\mu-||a||}{||x-a||}g(a) = \frac{\mu}{||a||}g(a)$ y así $\frac{\mu-||a||}{||x-a||} = \mu$, es decir, $\frac{1}{||x-a||} = \frac{\mu}{\mu-||a||}$. Luego $P_1 = \frac{x-a}{||x-a||}$ y dado que $x = \frac{f(y)-f(x)}{f(y)-f(P_1)}P_1 + \frac{f(x)-f(P_1)}{f(y)-f(P_1)}y$, se tiene que $a_0^*(P_1) \leq a_0^*(x)$ como queríamos demostrar (recuérdese que $a_0^*(y) > a_0^*(x)$, por lo que la desigualdad $a_0^*(P_1) > a_0^*(x)$ nos llevaría a una contradicción). Finalmente supongamos que $g(\frac{x-a}{||x-a||}) < g(x)$. Entonces $\frac{\mu-||a||}{||x-a||} > \mu$ y por tanto $\mu||x-a|| - \mu + ||a|| < 0$. Sean $t = \frac{\mu||x-a||}{\mu||x-a||-\mu+||a||}$ y $z_0 = (1-t)x + t\frac{x-a}{||x-a||}$. Evidentemente $t > 1$ y

$$\frac{x-a}{||x-a||} = (1-\tfrac{1}{t})x + \tfrac{1}{t}z_0,$$

de donde se deduce que $||z_0|| \geq 1$. Por otra parte,

$$\frac{\mu}{||a||}a = P = \frac{f(y)}{f(y)-f(x)}\,(x - \frac{f(x)}{f(y)}y)$$

y así $a = \frac{||a||}{\mu}\frac{f(y)}{f(y)-f(x)}\,(x - \frac{f(x)}{f(y)}y)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} z_0 &= (1-t)x + t\frac{x-a}{||x-a||} = (1-t+\frac{t}{||x-a||})x - \frac{t}{||x-a||}a \\ &= (1-t+\frac{t}{||x-a||})x - \frac{t}{||x-a||}\frac{||a||}{\mu}\frac{f(y)}{f(y)-f(x)}\,(x - \frac{f(x)}{f(y)}y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{t}{||x-a||}\tfrac{||a||}{\mu}\tfrac{f(y)}{f(y)-f(x)}\tfrac{f(x)}{f(y)}\,y + (1 - t + \tfrac{t}{||x-a||} - \tfrac{t}{||x-a||}\tfrac{||a||}{\mu}\tfrac{f(y)}{f(y)-f(x)})\,x \\
&= \tfrac{||a||}{\mu||x-a||-\mu+||a||}\tfrac{f(x)}{f(y)-f(x)}\,y + (\tfrac{||a||}{\mu||x-a||-\mu+||a||} - \tfrac{||a||}{\mu||x-a||-\mu+||a||}\tfrac{f(y)}{f(y)-f(x)})\,x \\
&= \tfrac{||a||}{\mu||x-a||-\mu+||a||}\tfrac{f(x)}{f(y)-f(x)}(y-x) = s(y-x),
\end{aligned}
$$

donde $s = \frac{||a||}{\mu||x-a||-\mu+||a||}\frac{f(x)}{f(y)-f(x)} < 0$. Así pues

$$1 \leq ||z_0|| = -s||y-x|| = -sa_0^*(y-x) = -a_0^*(s(y-x)) = -a_0^*(z_0),$$

esto es, $a_0^*(z_0) \leq -1$ y $a_0^*(z_0) \leq a_0^*(x)$. Concluímos que

$$a_0^*(\tfrac{x-a}{||x-a||}) = (1-\tfrac{1}{t})a_0^*(x) + \tfrac{1}{t}a_0^*(z_0) \leq a_0^*(x). \quad \blacksquare$$

A continuación obtenemos el teorema fundamental de este capítulo. Una desigualdad que, como más adelante veremos, resultará crucial para obtener los principales resultados de la memoria.

Teorema 2.6 *Sea X_0 un espacio normado de dimensión dos, $a \in X_0\backslash\{0\}$, $f \in X_0^*$ con $||f|| = 1$ y $\ker f = \mathrm{lin}\,\{a\}$. Consideremos $x, y \in S_{X_0}$ tales que $f(x) \geq 0$, $f(y) \geq 0$. Entonces*

$$|\,||y-a|| - ||x-a||\,| \geq \rho(1 - \tfrac{||x+y||}{2}),$$

donde $\rho = \frac{1}{6}\min\{1, ||a||^2\}$.

Demostración:

Puesto que $f(x) = 0$ si, y sólo si, $x \in \{\frac{a}{||a||}, -\frac{a}{||a||}\}$, el Lema 2.4 garantiza la validez del resultado si $f(x) = 0$ ó $f(y) = 0$. De hecho, en tal situación se verifica la tesis del teorema para una constante mayor que ρ (concretamente, $2\min\{1, ||a||\}$).

De ahora en adelante supondremos que $f(x) > 0$ y $f(y) > 0$. Comenzaremos observando que la demostración se reduce al caso $f(x) \neq f(y)$. En efecto, si $f(x) = f(y)$ y $||\frac{x+y}{2}|| = 1$ entonces $1 - ||\frac{x+y}{2}|| = 0$ y el resultado se verifica trivialmente. Si $f(x) = f(y)$ y $||\frac{x+y}{2}|| < 1$, entonces dado $t \in]0,1[$ se tiene que $0 < ||(1-t)x + ty|| < 1$ y así

$$f(\tfrac{(1-t)x+ty}{||(1-t)x+ty||}) > f((1-t)x+ty) = f(y).$$

Por tanto, podemos considerar una sucesión $\{x_n\}$ en S_{X_0} tal que $\{x_n\}$ converge a x y $f(x_n) > f(y)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si este teorema se verifica bajo la hipótesis adicional $f(x) \neq f(y)$, tenemos

$$|\,||y-a|| - ||x_n - a||\,| \geq \rho(1 - \tfrac{||x_n+y||}{2}), \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

y tomando límites obtenemos la desigualdad requerida.

Nos centramos pues en el caso $f(x) \neq f(y)$ y como no se pierde generalidad, supondremos de hecho $0 < f(x) < f(y)$.

Recordemos que el punto $P = \frac{f(y)}{f(y)-f(x)}\,(x - \frac{f(x)}{f(y)}y)$ pertenece a $\ker f$ y que

$$x = \tfrac{f(x)}{f(y)}y + (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)})P. \tag{2.3}$$

En consecuencia, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $P = \mu\frac{a}{||a||}$ y en virtud de (2.3), $||P|| \geq 1$ (ya que $||x|| = ||y|| = 1$). Por tanto $|\mu| \geq 1$ y debemos estudiar por separado los casos que pueden presentarse:

- $\mu \geq 1$ y $||a|| = \mu$.

En esta situación es obvio que $P = a$ y por tanto

$$||y-a|| = ||x-a|| + ||x-y||$$

(pues x pertenece al segmento $[a, y]$). En consecuencia,

$$||y-a|| - ||x-a|| = ||x-y|| = 2\,\tfrac{||x-y||}{2} \geq 2(1 - \tfrac{||x+y||}{2}) \geq \rho(1 - \tfrac{||x+y||}{2})$$

(téngase en cuenta que $1 = ||x|| = ||\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}|| \leq \frac{||x+y||}{2} + \frac{||x-y||}{2}$, lo que justifica la primera desigualdad).

- $\mu \geq 1$ y $||a|| > \mu$ (es decir $||a|| > ||P||$).

Sea x^* un funcional de soporte en el punto x. De (2.3) se deduce que $x^*(P) \geq 1$ (ya que $x^*(y) \leq 1 = x^*(x)$). Así pues, $\frac{\mu}{||a||}x^*(a) \geq 1$ y de este modo $x^*(a) \geq \frac{||a||}{\mu} > 1$. Consideremos el punto

$$z = \tfrac{x^*(a)-1}{x^*(a)-x^*(y)}\, y + \tfrac{1-x^*(y)}{x^*(a)-x^*(y)}\, a$$

que pertenece al segmento $[a, y]$ y veamos que $||x - a|| \leq ||z - a||$.Para ello, comprobaremos previamente que $f(z) > f(x)$. En efecto, sea $\alpha = \frac{x^*(a)-1}{x^*(a)-x^*(y)}$ y observemos que $f(z) = \alpha\, f(y)$. En virtud de (2.3),

$$1 = \tfrac{f(x)}{f(y)}x^*(y) + (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)})x^*(P),$$

de donde $x^*(a) - 1 = \frac{f(x)}{f(y)}(x^*(a) - x^*(y)) + (1 - \frac{f(x)}{f(y)})(x^*(a) - x^*(P))$. Teniendo en cuenta que $f(y) > f(x)$ y que $x^*(a) - x^*(P) = x^*(a) - \frac{\mu}{||a||}x^*(a) > 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned}(x^*(a) - 1)f(y) &= f(x)(x^*(a) - x^*(y)) + (f(y) - f(x))(x^*(a) - x^*(P)) \\ &> f(x)(x^*(a) - x^*(y)).\end{aligned}$$

Luego $\frac{x^*(a)-1}{x^*(a)-x^*(y)}f(y) > f(x)$, esto es $f(z) > f(x)$.

La definición de z garantiza que $y = \frac{1}{\alpha}z - \frac{1-\alpha}{\alpha}a$. Además,

$$1 - \tfrac{f(x)}{f(y)}x^*(y) = (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)})x^*(P) = (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)})\tfrac{\mu}{||a||}x^*(a),$$

de donde $(1 - \frac{f(x)}{f(y)})\frac{\mu}{||a||} = (1 - \frac{f(x)}{f(y)}x^*(y))\frac{1}{x^*(a)}$. Por otra parte,

$$\alpha x^*(y) + (1 - \alpha)x^*(a) = x^*(z) = \tfrac{(x^*(a)-1)x^*(y)+(1-x^*(y))x^*(a)}{x^*(a)-x^*(y)} = 1.$$

Haciendo uso de (2.3) y de estas últimas igualdades deducimos que

$$x = \tfrac{f(x)}{f(y)}(\tfrac{1}{\alpha}z - \tfrac{1-\alpha}{\alpha}a) + (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)})P$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{f(x)}{f(z)}z - \tfrac{f(x)(1-\alpha)}{f(z)}a + (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)})\tfrac{\mu}{||a||}a \\
&= \tfrac{f(x)}{f(z)}z - \tfrac{f(x)(1-\alpha)}{f(z)}a + (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)}x^*(y))\tfrac{a}{x^*(a)} \\
&= \tfrac{f(x)}{f(z)}z - \tfrac{f(x)(1-\alpha)x^*(a)}{f(z)}\tfrac{a}{x^*(a)} + (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)}x^*(y))\tfrac{a}{x^*(a)} \\
&= (1 - \tfrac{f(x)}{f(y)}x^*(y) - \tfrac{f(x)(1-\alpha)x^*(a)}{f(z)})\tfrac{a}{x^*(a)} + \tfrac{f(x)}{f(z)}z \\
&= \tfrac{f(z)-\alpha f(x)x^*(y)-f(x)(1-\alpha)x^*(a)}{f(z)}\tfrac{a}{x^*(a)} + \tfrac{f(x)}{f(z)}z \\
&= \tfrac{f(z)-f(x)(\alpha x^*(y)+(1-\alpha)x^*(a))}{f(z)}\tfrac{a}{x^*(a)} + \tfrac{f(x)}{f(z)}z \\
&= \tfrac{f(z)-f(x)}{f(z)}\tfrac{a}{x^*(a)} + \tfrac{f(x)}{f(z)}z.
\end{aligned}$$

Por tanto $x - a = \frac{f(z)-f(x)}{f(z)}(\frac{a}{x^*(a)} - a) + \frac{f(x)}{f(z)}(z-a)$. Como además

$$||\tfrac{a}{x^*(a)} - a|| = (1 - \tfrac{1}{x^*(a)})||a|| = ||a|| - \tfrac{||a||}{x^*(a)} \leq ||a|| - 1 \leq ||a - x||,$$

se tiene forzosamente $||x - a|| \leq ||z - a||$.

Como ya se ha indicado $z \in [a, y]$ y en consecuencia,

$$||y - a|| = ||y - z|| + ||z - a||.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
||y - a|| - ||x - a|| &= \\
&= ||y - z|| + ||z - a|| - ||x - a|| \geq ||y - z|| \\
&\geq |x^*(y - z)| = 1 - x^*(y) = 2\tfrac{1 - x^*(y)}{2} \\
&\geq 2(1 - \tfrac{||x+y||}{2}) \geq \rho(1 - \tfrac{||x+y||}{2}).
\end{aligned}$$

- $\mu \geq 1$ y $||a|| < \mu$.

De la igualdad $x = \frac{f(x)}{f(y)}y + (1 - \frac{f(x)}{f(y)})P$, se deduce que

$$f(y)x - f(x)y = (f(y) - f(x))\mu\tfrac{a}{||a||}.$$

En consecuencia,

$$(f(y)-f(x))\mu = ||f(y)x - f(x)y|| \leq f(x)+f(y).$$

Consideremos el número real $s = \frac{f(y)}{(f(y)-f(x))\frac{\mu}{||a||}+f(x)}$ y el punto $b = sx$. Entonces,

$$||b|| = s \geq \frac{f(y)}{(f(x)+f(y))\frac{1}{||a||}+f(x)} \geq \frac{f(y)}{2f(y)\frac{1}{||a||}+f(y)} = \frac{||a||}{2+||a||} \geq \frac{1}{3}\min\{1, ||a||\}.$$

Por otra parte, la condición $\mu > ||a||$ que hemos supuesto, garantiza que $s < 1$ (de hecho, ambas desigualdades son equivalentes). Además,

$$\begin{aligned}
b &= \frac{f(y)}{(f(y)-f(x))\frac{\mu}{||a||}+f(x)}x \\
&= \frac{f(y)}{(f(y)-f(x))\frac{\mu}{||a||}+f(x)}\left(\frac{f(x)}{f(y)}y + (1-\frac{f(x)}{f(y)})\frac{\mu}{||a||}a\right) \\
&= \frac{f(x)}{(f(y)-f(x))\frac{\mu}{||a||}+f(x)}\, y + \frac{(f(y)-f(x))\frac{\mu}{||a||}}{(f(y)-f(x))\frac{\mu}{||a||}+f(x)}\, a
\end{aligned}$$

y por tanto $b \in [a, y]$. De este modo $||y-a|| = ||y-b|| + ||b-a||$. Observemos también que

$$||x-a|| - ||b-a|| \leq |\,||x-a|| - ||b-a||\,| \leq ||x-b||.$$

Así pues,

$$||y-a|| - ||x-a|| = ||y-b|| + ||b-a|| - ||x-a|| \geq ||y-b|| - ||x-b||.$$

Puesto que $x = \frac{b}{||b||}$, el Lema 2.4 garantiza que

$$||y-b|| - ||x-b|| \geq 2\,\min\{1, ||b||\}(1-\tfrac{||x+y||}{2}).$$

Concluimos así que

$$||y-a|| - ||x-a|| \geq \tfrac{2}{3}\,\min\{1, ||a||\}(1-\tfrac{||x+y||}{2}) \geq \rho(1-\tfrac{||x+y||}{2}).$$

- $\mu \leq -1$ y $\frac{f(x)}{f(y)} \geq \min\{\frac{1}{2}, \frac{||a||}{4}\}$.

Como en el caso precedente, $f(y)x - f(x)y = (f(y) - f(x))\mu\frac{a}{||a||}$. En consecuencia,

$$(f(y) - f(x))(-\mu) = ||f(y)x - f(x)y|| \leq f(x) + f(y).$$

Sea $s = \frac{f(x)}{f(y) - \frac{\mu}{||a||}(f(y)-f(x))}$ y $c = sy$. Es claro que

$$\begin{aligned} ||c|| &= s \geq \tfrac{f(x)}{f(y)+\frac{1}{||a||}(f(x)+f(y))} \\ &\geq \tfrac{f(x)}{f(y)+2f(y)\frac{1}{||a||}} = \tfrac{||a||}{||a||+2}\tfrac{f(x)}{f(y)} \\ &\geq \tfrac{||a||}{||a||+2} \min\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{||a||}{4}\} \geq \tfrac{1}{12} \min\{1, ||a||^2\}. \end{aligned}$$

Evidentemente $s < 1$ y

$$\begin{aligned} c &= \tfrac{f(x)}{f(y)-\frac{\mu}{||a||}(f(y)-f(x))}y \\ &= \tfrac{f(x)}{f(y)-\frac{\mu}{||a||}(f(y)-f(x))}(\tfrac{f(y)}{f(x)}x - \tfrac{f(y)-f(x)}{f(x)}\tfrac{\mu}{||a||}a) \\ &= \tfrac{f(y)}{f(y)-\frac{\mu}{||a||}(f(y)-f(x))}x + \tfrac{-\frac{\mu}{||a||}(f(y)-f(x))}{f(y)-\frac{\mu}{||a||}(f(y)-f(x))}a. \end{aligned}$$

Luego $c \in [a, x]$ y por tanto $||x - a|| = ||x - c|| + ||c - a||$. Por otra parte

$$||y - a|| - ||c - a|| \leq |\, ||y - a|| - ||c - a||\, | \leq ||y - c||$$

y así

$$||x - a|| - ||y - a|| = ||x - c|| + ||c - a|| - ||y - a|| \geq ||x - c|| - ||y - c||.$$

Como $y = \frac{c}{||c||}$, el Lema 2.4 garantiza que

$$||x - c|| - ||y - c|| \geq 2 \min\{1, ||c||\}(1 - \tfrac{||x+y||}{2}).$$

Luego $||x - a|| - ||y - a|| \geq \frac{1}{6} \min\{1, ||a||^2\}(1 - \frac{||x+y||}{2}) = \rho(1 - \frac{||x+y||}{2})$.

- $\mu \leq -1$ y $\frac{f(x)}{f(y)} < \min\{\frac{1}{2}, \frac{||a||}{4}\}$.

De acuerdo con la Proposición 2.3,

$$d(x, \min\{\tfrac{a}{||a||}\}) \geq \frac{1}{2} \min\{||x - \tfrac{a}{||a||}||, ||x + \tfrac{a}{||a||}||\}.$$

Además, $d(x, \text{lin}\{\frac{a}{||a||}\}) = f(x) < \frac{1}{2}$ y en consecuencia

$$\min\{||x - \tfrac{a}{||a||}||, ||x + \tfrac{a}{||a||}||\} < 1.$$

Para determinar este mínimo sea a^* un funcional de soporte en el punto $\frac{a}{||a||}$. Entonces

$$a^*(x) = \tfrac{f(x)}{f(y)}a^*(y)+(1-\tfrac{f(x)}{f(y)})a^*(P) = \tfrac{f(x)}{f(y)}a^*(y)+(1-\tfrac{f(x)}{f(y)})\mu \leq \tfrac{f(x)}{f(y)}+\tfrac{f(x)}{f(y)}-1 < 0$$

y así $||x - \frac{a}{||a||}|| \geq |a^*(x - \frac{a}{||a||})| = 1 - a^*(x) > 1$. Por tanto,

$$||x + \tfrac{a}{||a||}|| = \min\{||x - \tfrac{a}{||a||}||, ||x + \tfrac{a}{||a||}||\} \leq 2d(x, \text{lin}\{\tfrac{a}{||a||}\}) = 2f(x) < \tfrac{||a||}{2}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} ||x - a|| &= ||(x + \frac{a}{||a||}) - (a + \frac{a}{||a||})|| \\ &\geq ||a + \frac{a}{||a||}|| - ||x + \frac{a}{||a||}|| \\ &= ||a|| + 1 - ||x + \tfrac{a}{||a||}|| > 1 + \tfrac{||a||}{2}. \end{aligned}$$

Si $d = (1 - ||x - a||)x$, es claro que

$$||d|| = ||x - a|| - 1 > \tfrac{||a||}{2} \quad \text{y} \quad ||x - d|| = ||x - a||.$$

Además, de acuerdo con el Lema 2.5, $||y - d|| \geq ||y - a||$. Estos hechos y el Lema 2.4 que podemos aplicar ya que $x = -\frac{d}{||d||}$, garantizan que

$$\begin{aligned} ||x - a|| - ||y - a|| &\geq ||x - d|| - ||y - d|| \\ &\geq 2 \min\{1, ||d||\}(1 - \tfrac{||x+y||}{2}) \\ &\geq 2 \min\{1, \tfrac{||a||}{2}\}(1 - \tfrac{||x+y||}{2}) \geq \rho(1 - \tfrac{||x+y||}{2}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La ilustración de la desigualdad que acabamos de demostrar podría ser la siguiente:

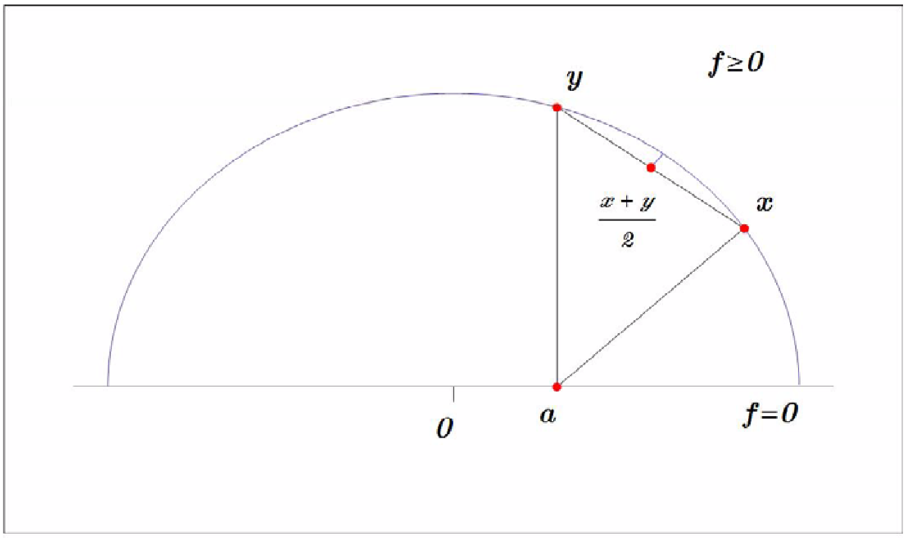


Figura 2.5

2.3 La constante óptima

Sean X un espacio normado real de dimensión 2, $a \in X\backslash\{0\}$, $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $\ker f = \operatorname{lin}\{a\}$. El Teorema 2.6 garantiza la existencia de una constante positiva ρ tal que

$$x, y \in S_X,\ f(x) \geq 0,\ f(y) \geq 0 \Rightarrow |\|y-a\| - \|x-a\|| \geq \rho(1 - \tfrac{\|x+y\|}{2}). \quad (2.4)$$

Ni que decir tiene, que si la desigualdad se verifica para un cierto $\rho \in \mathbb{R}^+$, automáticamente se cumple para toda constante $\rho' < \rho$. Nuestro objetivo en esta sección es precisamente encontrar el valor óptimo de la constante en el caso especial de los espacios de Hilbert.

Antes de centrarnos en el caso que acabamos de citar, podemos analizar las limitaciones que impone la desigualdad (2.4). Si se cumple para cualesquiera $x, y \in S_X$, con $f(x) \geq 0$ y $f(y) \geq 0$, en particular ha de verificarse para $x = \frac{a}{\|a\|}$ e $y = -\frac{a}{\|a\|}$. Luego

$$\left| \left\| -\tfrac{a}{\|a\|} - a \right\| - \left\| \tfrac{a}{\|a\|} - a \right\| \right| \geq \rho,$$

de donde se sigue inmediatamente que

$$1 + \|a\| - |1 - \|a\|| \geq \rho.$$

En consecuencia, si $\|a\| \geq 1$, $\rho \leq 2$ y si $\|a\| \leq 1$, $\rho \leq 2\|a\|$. Así pues, si ρ satisface la desigualdad, necesariamente $\rho \leq 2\min\{1, \|a\|\}$. En el caso general, tenemos constancia gracias al Lema 2.4, de que este último valor es factible en el caso de que uno de los vectores x ó y coincida con $\frac{a}{\|a\|}$ ó $-\frac{a}{\|a\|}$.

Mostraremos en este apartado, que la constante óptima en el caso de los espacios de Hilbert es exactamente $2\min\{1, \|a\|\}$.

En lo que sigue, mientras no se especifique lo contrario, $\|\cdot\|$ denotará la norma euclídea de $\mathbb{R}^2$ y (t, s), (t_0, s_0) serán dos puntos de tal espacio tales que $\|(t, s)\| = \|(t_0, s_0)\| = 1$, $s, s_0 \geq 0$ y $t \geq t_0$.

En primer lugar analizaremos el comportamiento de la función φ, de $[1, +\infty[$ en $\mathbb{R}$, dada por

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= \|(t_0, s_0) - (\alpha, 0)\| - \|(t, s) - (\alpha, 0)\| \\ &= \sqrt{(\alpha - t_0)^2 + s_0^2} - \sqrt{(\alpha - t)^2 + s^2}, \ \forall \alpha \in [1, +\infty[\ . \end{aligned}$$

Concretamente nos interesa la propiedad que sigue:

Lema 2.7 $\varphi(\alpha) \geq \min\{\varphi(1), t - t_0\}$, *para todo* $\alpha \in [1, +\infty[$.

Demostración:

Si $\alpha > 1$, es claro que

$$\|(t_0, s_0) - (\alpha, 0)\| > 0 \quad y \quad \|(t, s) - (\alpha, 0)\| > 0.$$

Equivalentemente $(\alpha - t_0)^2 + s_0^2 > 0$ y $(\alpha - t)^2 + s^2 > 0$. Así pues, la función φ es derivable salvo a lo sumo en el punto 1, con

$$\varphi'(\alpha) = \frac{\alpha - t_0}{\sqrt{(\alpha-t_0)^2+s_0^2}} - \frac{\alpha - t}{\sqrt{(\alpha-t)^2+s^2}}, \text{ para todo } \alpha \in \left]1, +\infty\right[.$$

Fijemos un número real $\alpha > 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi'(\alpha) \geq 0 \ &\Leftrightarrow\ (\alpha - t_0)\sqrt{(\alpha - t)^2 + s^2} \geq (\alpha - t)\sqrt{(\alpha - t_0)^2 + s_0^2} \\
&\Leftrightarrow\ (\alpha - t_0)^2\left((\alpha - t)^2 + s^2\right) \geq (\alpha - t)^2\left((\alpha - t_0)^2 + s_0^2\right) \\
&\Leftrightarrow\ (\alpha - t_0)^2 s^2 \geq (\alpha - t)^2 s_0^2 \\
&\Leftrightarrow\ s^2\alpha^2 - 2t_0 s^2\alpha + t_0^2 s^2 \geq s_0^2\alpha^2 - 2ts_0^2\alpha + t^2 s_0^2 \\
&\Leftrightarrow\ (s^2 - s_0^2)\alpha^2 - 2(t_0 s^2 - ts_0^2)\alpha + t_0^2 s^2 - t^2 s_0^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow\ (t_0^2 - t^2)\alpha^2 - 2(t_0 - t)(1 + t_0 t)\alpha + t_0^2 - t^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Si $t_0^2 = t^2$, se tiene claramente que $\varphi'(\alpha) \geq 0$, para todo $\alpha \in \left[1, +\infty\right[$ y en consecuencia, φ es creciente. Supongamos pues que $t_0^2 \neq t^2$ (con lo que, en particular, $t_0 < t$). El razonamiento precedente nos dice en tal caso que

$$\varphi'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow (t_0 + t)\alpha^2 - 2(1 + t_0 t)\alpha + t_0 + t \leq 0. \qquad (2.5)$$

Evidentemente $t_0 + t \neq 0$ y las raices con respecto a la variable α de la ecuación

$$(t_0 + t)\alpha^2 - 2(1 + t_0 t)\alpha + t_0 + t = 0,$$

son $\alpha_1 = \frac{1+t_0 t - s_0 s}{t_0+t}$ y $\alpha_2 = \frac{1+t_0 t + s_0 s}{t_0+t}$. Si $t_0 + t < 0$, se comprueba inmediatamente que $\alpha_2 \leq \alpha_1 < 0$. En particular, la condición (2.5) se verifica para todo $\alpha > 1$ y la función φ es creciente también en este caso. De forma análoga, si $t_0 + t > 0$ entonces $0 < \alpha_1 \leq 1 \leq \alpha_2$ con lo que la función φ crece en $[1, \alpha_2]$ y decrece en $\left[\alpha_2, +\infty\right[$.

Para concluir, basta observar que $\lim_{\alpha\to+\infty} \varphi(\alpha) = t - t_0$. ∎

De acuerdo con el resultado anterior, debemos mostrar que cualquiera de los números reales $\varphi(1)$ y $t - t_0$ es mayor o igual que $2\left(1 - \left\|\frac{(t,s)+(t_0,s_0)}{2}\right\|\right)$.

Lema 2.8 $t - t_0 \geq 2 - \|(t, s) + (t_0, s_0)\|$.

Demostración:

Es claro que $t - t_0 \geq 2 - \|(t, s) + (t_0, s_0)\| \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad t - t_0 \geq 2 - \sqrt{(t + t_0)^2 + (s + s_0)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad t - t_0 \geq 2 - \sqrt{2}\sqrt{1 + t_0 t + s_0 s} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sqrt{1 + t_0 t + s_0 s} \geq 2 - (t - t_0) \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,(1 + t_0 t + s_0 s) \geq 4 - 4(t - t_0) + (t - t_0)^2.
\end{aligned}$$

Consideremos las funciones $\psi_1, \psi_2 : [t_0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned}
\psi_1(\xi) &= 2\left(1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1 - \xi^2}\right), \\
\psi_2(\xi) &= 4 - 4(\xi - t_0) + (\xi - t_0)^2, \text{ para todo } \xi \in [t_0, 1].
\end{aligned}$$

Entonces $\psi_1(t_0) = \psi_2(t_0) = 4$ y $\psi_1(1) = 2 + 2t_0 \geq t_0^2 + 1 + 2t_0 = \psi_2(1)$. Puesto que la función ψ_1 es cóncava y la función ψ_2 es convexa, de lo anterior se deduce inmediatamente que $\psi_1(\xi) \geq \psi_2(\xi)$, para todo $\xi \in [t_0, 1]$. En particular $2\,(1 + t_0 t + s_0 s) \geq 4 - 4(t - t_0) + (t - t_0)^2$. ∎

Antes de abordar lo que corresponde a $\varphi(1)$ conviene observar que

$$t_0\xi + s_0\sqrt{1 - \xi^2} \geq -\xi, \text{ para todo } \xi \in [t_0, 1]. \tag{2.6}$$

Esto es trivialmente cierto si $t_0 \geq 0$. Del mismo modo si $t_0 < 0$ y $\xi \geq 0$, es claro que $-\xi \leq t_0\xi$ y con mayor motivo $t_0\xi + s_0\sqrt{1 - \xi^2} \geq -\xi$. Por otra parte, si $t_0 \leq \xi < 0$ escribimos (2.6) en la forma $s_0\sqrt{1 - \xi^2} \geq -(1 + t_0)\xi$ que evidentemente equivale a la desigualdad $s_0^2 \geq \left((1+t_0)^2 + s_0^2\right)\xi^2$ o lo que es lo mismo

$$s_0^2 \geq 2\,(1+t_0)\,\xi^2. \tag{2.7}$$

La condición $t_0 \leq \xi < 0$ implica que $\xi^2 \leq t_0^2$. Por tanto

$$2\,(1+t_0)\,\xi^2 \leq 2\,(1+t_0)\,t_0^2$$

y sólo nos resta probar que $2\,(1+t_0)\,t_0^2 \leq s_0^2$. Con tal propósito notemos que $(t_0+1)\,(2t_0-1) \leq 0$, esto es, $2t_0^2 + t_0 - 1 \leq 0$. Luego $2t_0^2 \leq 1 - t_0$ y así $2\,(1+t_0)\,t_0^2 \leq s_0^2$. Esto completa la prueba de (2.7) o equivalentemente de (2.6).

Lema 2.9 $\varphi(1) \geq 2 - \|(t,s) + (t_0,s_0)\|$.

Demostración:

En primer lugar nos proveemos de una expresión conveniente de la desigualdad propuesta: $\varphi(1) \geq 2 - \|(t,s) + (t_0,s_0)\| \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \sqrt{(1-t_0)^2 + s_0^2} - \sqrt{(1-t)^2 + s^2} \geq 2 - \sqrt{2}\sqrt{1 + t_0 t + s_0 s} \\
&\Leftrightarrow\ \sqrt{1-t_0} - \sqrt{1-t} \geq \sqrt{2} - \sqrt{1 + t_0 t + s_0 s} \\
&\Leftrightarrow\ \sqrt{1 + t_0 t + s_0 s} - \sqrt{1-t} \geq \sqrt{2} - \sqrt{1-t_0}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

El caso $t_0 = 1$ es muy sencillo pues en tal situación $s_0 = 0$ y teniendo en cuenta que por hipótesis $t \geq t_0$, se tiene necesariamente $t = 1$ y $s = 0$. Así pues se cumple (2.8) con igualdad. Por tanto supondremos que $t_0 < 1$.

Consideremos la función $\psi : [t_0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(\xi) = \sqrt{1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2}} - \sqrt{1-\xi},\ \text{para todo } \xi \in [t_0, 1]\,.$$

Todo se reduce a probar que la función ψ es creciente.

Evidentemente, ψ es continua en $[t_0, 1]$ y derivable en $]t_0, 1[$ [1] con

$$\psi'(\xi) = \frac{1}{2}\frac{t_0\sqrt{1-\xi}-\frac{s_0\xi}{\sqrt{1+\xi}}+\sqrt{1+t_0\xi+s_0\sqrt{1-\xi^2}}}{\sqrt{1+t_0\xi+s_0\sqrt{1-\xi^2}}\sqrt{1-\xi}}\,, \text{ para todo } \xi \in \,]t_0, 1[\;.$$

Luego cualquiera que sea $\xi \in \,]t_0, 1[\,$, $\psi'(\xi) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad t_0\sqrt{1-\xi} - \frac{s_0\xi}{\sqrt{1+\xi}} + \sqrt{1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2}} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\xi}\sqrt{1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2}} \geq s_0\xi - t_0\sqrt{1-\xi^2}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Fijemos un elemento ξ en el intervalo $]t_0, 1[\,$. Si $t_0 \geq 0$, la comprobación de la desigualdad (2.9) no ofrece dificultad pues en tal caso $\xi > 0$ y en consecuencia

$$\sqrt{1+\xi}\sqrt{1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2}} > 1 \geq s_0\xi \geq s_0\xi - t_0\sqrt{1-\xi^2}.$$

Supongamos pues que $t_0 < 0$. Como primer paso bajo esta última hipótesis, asumamos adicionalmente que $\xi \leq 0$ y sea

$$b(\xi) = -2s_0\xi\sqrt{1+\xi}\sqrt{1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Es claro que

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\xi}\sqrt{1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2}} - s_0\xi \geq -t_0\sqrt{1-\xi^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (1+\xi)\left(1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2}\right) + s_0^2\xi^2 + b(\xi) \geq t_0^2(1-\xi^2) \\
&\Leftrightarrow \quad (1+\xi)\left(1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2}\right) + \xi^2 + b(\xi) \geq t_0^2.
\end{aligned}$$

La última desigualdad es fácil de verificar pues de acuerdo con (2.6),

$$(1+\xi)\left(1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2}\right) + \xi^2 + b(\xi) \geq 1 - \xi^2 + \xi^2 + b(\xi) \geq 1 \geq t_0^2.$$

[1]Dado $\xi \in \,]t_0, 1[\,$, es obvio que $1 - \xi^2 > 0$ y $1 - \xi > 0$. Además si $t_0\xi \geq 0$, es claro que $1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2} \geq 1 > 0$ y si $t_0\xi < 0$, forzosamente $t_0 < 0 < \xi$. Por tanto, $(-t_0)\xi < -t_0$ y en consecuencia $t_0\xi > t_0 \geq -1$. Luego $1 + t_0\xi > 0$ y con mayor motivo $1 + t_0\xi + s_0\sqrt{1-\xi^2} > 0$.

Supongamos ahora $\xi > 0$ y sean

$$c(\xi) = \sqrt{1-\xi^2} \quad \text{y} \quad d(\xi) = s_0 c(\xi)\,(1+\xi+2t_0\xi)\,.$$

Puesto que $s_0\xi - t_0 c(\xi) \geq 0$, es claro que

$$\begin{aligned} (2.9) \quad &\Leftrightarrow \quad (1+\xi)\,(1+t_0\xi+s_0c(\xi)) \geq s_0^2\xi^2 + t_0^2(1-\xi^2) - 2t_0s_0\xi c(\xi) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(2t_0^2+t_0-1\right)\xi^2 + (t_0+1)\,\xi + 1 - t_0^2 + d(\xi) \geq 0. \end{aligned}$$

Evidentemente $t_0\xi \geq -\xi$ y desde luego $t_0\xi \geq -1$. Por tanto

$$2t_0\xi \geq -\xi - 1$$

y así $1+\xi+2t_0\xi \geq 0$, de donde se deduce que $d(\xi) \geq 0$. La prueba de la desigualdad (2.9) habrá concluido si demostramos que

$$\left(2t_0^2+t_0-1\right)\xi^2 + (t_0+1)\,\xi + 1 - t_0^2 \geq 0. \tag{2.10}$$

Puesto que la anterior relación se cumple trivialmente si $t_0 = -1$, supondremos que $t_0 > -1$. En tales circunstancias la desigualdad (2.10) puede expresarse como sigue:

$$(2t_0-1)\,\xi^2 + \xi + 1 - t_0 \geq 0. \tag{2.11}$$

Las raices con respecto a la variable ξ de la ecuación

$$(2t_0-1)\,\xi^2 + \xi + 1 - t_0 = 0,$$

son como fácilmente se comprueba

$$\xi_1 = \tfrac{-1+\sqrt{8t_0^2-12t_0+5}}{4t_0-2} \quad \text{y} \quad \xi_2 = \tfrac{-1-\sqrt{8t_0^2-12t_0+5}}{4t_0-2}\,.$$

Es inmediato que $\xi_1 < 0$ y $\xi_2 > 1$ (tales desigualdades equivalen a afirmar que $(t_0-1)\,(2t_0-1) > 0$ y que $(t_0+1)\,(2t_0-1) < 0$, respectivamente. Ambas inecuaciones son evidentemente ciertas).

Bajo las hipótesis actuales, $0 < \xi < 1$ y en particular $\xi_1 < \xi < \xi_2$. Como además $2t_0 - 1 < 0$, la desigualdad (2.11) es claramente cierta. De este modo se confirma también la veracidad de las inecuaciones (2.10) y (2.9).

En definitiva, la función ψ es creciente como habíamos postulado y por tanto $\psi(\xi) \geq \psi(t_0)$, para todo $\xi \in [t_0, 1]$. En particular $\psi(t) \geq \psi(t_0)$, es decir,

$$\sqrt{1 + t_0 t + s_0 s} - \sqrt{1 - t} \geq \sqrt{2} - \sqrt{1 - t_0}.$$

Una inecuación ésta última que, como dijimos al comienzo, equivale a la desigualdad del enunciado. ■

Presentamos a continuación una consecuencia inmediata de los tres lemas anteriores.

Lema 2.10 $\|(t_0, s_0) - (\alpha, 0)\| - \|(t, s) - (\alpha, 0)\| \geq 2 - \|(t, s) + (t_0, s_0)\|$, *para todo número real* $\alpha \geq 1$.

En realidad, este último resultado permite deducir fácilmente la desigualdad que corresponde a cada número real positivo α.

Proposición 2.11 *Sea* α *un número real positivo y* $\rho(\alpha) = 2 \min \{1, \alpha\}$. *Entonces*

$$\|(t_0, s_0) - (\alpha, 0)\| - \|(t, s) - (\alpha, 0)\| \geq \rho(\alpha) \left(1 - \tfrac{\|(t,s)+(t_0,s_0)\|}{2}\right).$$

Demostración:

Para $\alpha \geq 1$, la afirmación del enunciado coincide exactamente con la del lema anterior. Por otra parte si $0 < \alpha < 1$, podemos aplicar dicho resultado para obtener que

$$\left\|(t_0, s_0) - (\tfrac{1}{\alpha}, 0)\right\| - \left\|(t, s) - (\tfrac{1}{\alpha}, 0)\right\| \geq 2 - \|(t, s) + (t_0, s_0)\|.$$

Multiplicando por α obtenemos que

$$\|\alpha(t_0, s_0) - (1,0)\| - \|\alpha(t,s) - (1,0)\| \geq 2\alpha - \alpha \|(t,s) + (t_0, s_0)\| .$$

Es inmediato que $\|\alpha(t_0, s_0) - (1,0)\| = \|(t_0, s_0) - (\alpha, 0)\|$ y del mismo modo $\|\alpha(t,s) - (1,0)\| = \|(t,s) - (\alpha, 0)\|$. Por tanto,

$$\|(t_0, s_0) - (\alpha, 0)\| - \|(t,s) - (\alpha, 0)\| \geq 2\alpha \left(1 - \tfrac{\|(t,s)+(t_0,s_0)\|}{2}\right)$$

que es la desigualdad del enunciado para $\alpha < 1$. ■

Teorema 2.12 *Sean X un espacio de Hilbert real de dimensión 2, $f \in X^*$ con $\|f\| = 1, a \in X \backslash \{0\}$ y $\ker f = \operatorname{lin}\{a\}$. Consideremos $x, y \in S_X$ tales que $f(x) \geq 0, f(y) \geq 0$. Entonces*

$$|\|y - a\| - \|x - a\|| \geq 2 \min\{1, \|a\|\}(1 - \tfrac{\|x+y\|}{2}).$$

Demostración:

Sean $u = \frac{a}{\|a\|}$, $v \in S_X$ con $\langle u, v \rangle = 0$ y $f(v) > 0$ (donde por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hemos denotado el producto escalar de X). La aplicación $\Phi : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to X$ dada por

$$\Phi(t,s) = tu + sv \quad \forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$$

es un isomorfismo isométrico. Además $\Phi(\|a\|, 0) = \|a\| u = a$ y si (t,s) es un elemento de $S_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)}$ con $s \geq 0$, se tiene que

$$f(\Phi(t,s)) = tf(u) + sf(v) \geq 0.$$

Así pues $\Phi(\{(t,s) \in S_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)} : s \geq 0\}) \subset \{x \in S_X : f(x) \geq 0\}$. Recíprocamente, consideremos $x \in S_X$ con $f(x) \geq 0$ y $(t,s) = \Phi^{-1}(x)$. Evidentemente

$(t,s) \in S_{\mathbb{R}^2}$ y $tu + sv = \Phi(t,s) = x$, luego $sf(v) = f(x) \geq 0$ y así $s \geq 0$, con lo que $\{x \in S_X : f(x) \geq 0\} \subset \Phi\big(\big\{(t,s) \in S_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)} : s \geq 0\big\}\big)$ y

$$\Phi(\{(t,s) \in S_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)} : s \geq 0\}) = \{x \in S_X : f(x) \geq 0\}\,.$$

Consideremos ahora $x, y \in S_X$ con $f(x) \geq 0, f(y) \geq 0$ y sean

$$\Phi^{-1}(x) = (x_1, x_2) \quad \text{y} \quad \Phi^{-1}(y) = (y_1, y_2).$$

Supongamos, sin perder generalidad, que $x_1 \geq y_1$. Podemos entonces aplicar la Proposición 2.11 con $(t,s) = (x_1, x_2)$, $(t_0, s_0) = (y_1, y_2)$ y $\alpha = \|a\|$. Así pues,

$$\|(t_0, s_0) - (\|a\|\,, 0)\| - \|(t,s) - (\|a\|\,, 0)\| \geq 2\min\{1, \|a\|\}\left(1 - \tfrac{\|(t,s)+(t_0,s_0)\|}{2}\right).$$

Teniendo en cuenta que Φ es un isomorfismo isométrico, concluimos que:

$$|\|y-a\| - \|x-a\|| = \|y-a\| - \|x-a\| \geq 2\min\{1, \|a\|\}(1 - \tfrac{\|x+y\|}{2}). \quad \blacksquare$$

Señalemos finalmente que si renunciamos a conseguir la constante óptima, puede hacerse una demostración sensiblemente más corta de la desigualdad en espacios de Hilbert. En este sentido, Fernando Rambla nos ha comunicado una demostración en la que se consigue la constante $\rho = \frac{2\|a\|}{1+\|a\|}$. Nótese que para $\|a\| = 1$, por citar un ejemplo, se obtiene $\rho = 1$, mientras que $2\min\{1, \|a\|\} = 2$.

Capítulo 3

Aplicaciones sin puntos fijos ni antípodas

Las aplicaciones sin puntos fijos ni antípodas desempeñarán un importante papel en nuestro estudio de la estructura extremal de los espacios de funciones uniformemente continuas con valores en un espacio normado X. Comenzaremos el capítulo con una versión general sobre existencia de tal tipo de aplicaciones y a continuación analizaremos algunas mejoras que pueden conseguirse en función de la dimensión de X.

En la parte final del capítulo, abordaremos la conexión de este tipo de aplicaciones con ciertos problemas de renormación que nos parecen sumamente interesantes y que deja abierta una sugestiva línea de trabajo.

3.1 Proyección estereográfica y aplicaciones entre esferas

Sea A un espacio normado real[1] y para cada $(a,t) \in A \times \mathbb{R}$ notemos

$$\|(a,t)\|_2 = \sqrt{\|a\|^2 + t^2}.$$

Consideremos $X = (A \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ y $P = (0,1) \in S_X$. Dado $(a,t) \in S_X$, se tiene que $\|a\|^2 + t^2 = 1$ y por tanto $(a,t) = P$ si, y sólo si, $t = 1$. Sea $\pi : S_X \backslash \{P\} \to A$ la aplicación dada por

$$\pi(a,t) = \tfrac{a}{1-t}, \text{ para todo } (a,t) \in S_X \backslash \{P\}. \tag{3.1}$$

Acabamos de justificar que $t \neq 1$ para todo $(a,t) \in S_X \backslash \{P\}$ y por tanto π está bien definida. Se trata de una generalización a nuestro actual ambiente de la conocida proyección estereográfica de los espacios euclídeos. Resumimos en el siguiente enunciado las propiedades que más nos interesan.

Lema 3.1 *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

i) La aplicación π es un homeomorfismo y su inversa, $\pi^{-1} : A \to S_X \backslash \{P\}$, viene dada por

$$\pi^{-1}(a) = \left(\tfrac{2a}{\|a\|^2+1}, \tfrac{\|a\|^2-1}{\|a\|^2+1}\right), \text{ para todo } a \in A.$$

ii) $\|\pi(a,t) - \pi(-a,-t)\| \geq 2$, para todo $(a,t) \in S_X \backslash \{P, -P\}$.

[1] Aparte de nuestra elección con carácter general del caso real como ambiente de trabajo, notemos que en el caso complejo, las aplicaciones cuya existencia pretendemos mostrar en ésta y en la siguiente sección es obvia. (Véanse para ello los comentarios introductorios del último apartado de este capítulo).

iii) π^{-1} *es lipschitziana.*

iv) La restricción de π *a* $S_X \backslash B(P,\delta)$ *es lipschitziana, cualquiera que sea* $\delta \in]0,2]$.

v) Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$ *y* $a \in A$ *con* $\|a\| \leq \delta$, *se tiene que*

$$\left\|\pi^{-1}(a) - P\right\|_2 \geq \tfrac{2}{\sqrt{\delta^2+1}}.$$

vi) Si $\rho \in \mathbb{R}^+$, $(a,t) \in S_X$ *y* $\|(a,t) - P\|_2 \geq \rho$, *entonces*

$$\|\pi(a,t)\| \leq \tfrac{2}{\rho}.$$

vii) Si $a \in A$ *y* $(b,t) = \pi^{-1}(a)$, *se tiene que* $|t| \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left|\|a\| - 1\right|$.

Demostración:

i) Es claro que π es continua y que también lo es la aplicación $g : A \to X$ definida por

$$g(a) = \left(\tfrac{2a}{\|a\|^2+1}, \tfrac{\|a\|^2-1}{\|a\|^2+1}\right), \text{ para todo } a \in A.$$

Además, cualquiera que sea $a \in A$, $\|g(a)\|_2^2 = 1$ y $g(a) \neq P$. Por consiguiente $g(A) \subset S_X \backslash \{P\}$. Podemos pues considerar la aplicación $\pi \circ g$ que como enseguida veremos coincide con la identidad en A. En efecto, dado $a \in A$,

$$(\pi \circ g)(a) = \pi\left(\tfrac{2a}{\|a\|^2+1}, \tfrac{\|a\|^2-1}{\|a\|^2+1}\right) = a.$$

De forma análoga, dado $(a,t) \in S_X \backslash \{P\}$,

$$\begin{aligned} (g \circ \pi)(a,t) &= g\left(\tfrac{a}{1-t}\right) = \left(\tfrac{2(1-t)a}{\|a\|^2+(1-t)^2}, \tfrac{\|a\|^2-(1-t)^2}{\|a\|^2+(1-t)^2}\right) \\ &= \left(\tfrac{2(1-t)a}{1-t^2+(1-t)^2}, \tfrac{1-t^2-(1-t)^2}{1-t^2+(1-t)^2}\right) = \left(\tfrac{2(1-t)a}{2(1-t)}, \tfrac{2t(1-t)}{2(1-t)}\right) = (a,t). \end{aligned}$$

Se prueba así que π es biyectiva y que $\pi^{-1} = g$. Puesto que π y π^{-1} son continuas, concluimos que π es un homeomorfismo.

ii) Dado $(a,t) \in S_X \backslash \{P,-P\}$,

$$\|\pi(a,t)-\pi(-a,-t)\| = \left\|\tfrac{a}{1-t} - \tfrac{-a}{1+t}\right\| = \tfrac{2\|a\|}{1-t^2} = \tfrac{2}{\|a\|} \geq 2.$$

iii) Sean $a,b \in A$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\tfrac{2a}{\|a\|^2+1} - \tfrac{2b}{\|b\|^2+1}\right\| &= \left\|\tfrac{2(\|b\|^2+1)a-2(\|a\|^2+1)b}{(\|a\|^2+1)(\|b\|^2+1)}\right\| \\
&= \left\|\tfrac{2(\|b\|^2+1)a-2(\|b\|^2+1)b+2(\|b\|^2+1)b-2(\|a\|^2+1)b}{(\|a\|^2+1)(\|b\|^2+1)}\right\| \\
&= \left\|\tfrac{2(\|b\|^2+1)(a-b)+2(\|b\|^2-\|a\|^2)b}{(\|a\|^2+1)(\|b\|^2+1)}\right\| \\
&\leq \left(2+\tfrac{2(\|a\|+\|b\|)\|b\|}{(\|a\|^2+1)(\|b\|^2+1)}\right)\|a-b\| \\
&= 2\left(1+\tfrac{\|a\|}{\|a\|^2+1}\tfrac{\|b\|}{\|b\|^2+1}+\tfrac{\|b\|^2}{(\|a\|^2+1)(\|b\|^2+1)}\right)\|a-b\| \\
&\leq 2(1+\tfrac{1}{4}+1)\|a-b\| \leq \tfrac{9}{2}\|a-b\|.
\end{aligned}$$

De forma similar,

$$\left|\tfrac{\|a\|^2-1}{\|a\|^2+1} - \tfrac{\|b\|^2-1}{\|b\|^2+1}\right| = \left|\tfrac{2(\|a\|^2-\|b\|^2)}{(\|a\|^2+1)(\|b\|^2+1)}\right| \leq \tfrac{2(\|a\|+\|b\|)}{(\|a\|^2+1)(\|b\|^2+1)}\|a-b\| \leq 2\|a-b\|.$$

Así pues, las dos funciones coordenadas de π^{-1} son lipschitzianas y en consecuencia la función π^{-1} también lo es.

iv) Es suficiente probar la afirmación para $\delta \in]0,1]$:

Dado $(a,t) \in S_X \backslash B(P,\delta)$ se verifica que $\|a\|^2+t^2=1$ y $\|a\|^2+(t-1)^2 \geq \delta^2$. Por tanto, $1-t \geq \frac{\delta^2}{2}$ y evidentemente $\|a\| \leq 1$. De este modo, cualesquiera que sean $(a,t),(b,s) \in S_X \backslash B(P,\delta)$,

$$\begin{aligned}
\|\pi(a,t)-\pi(b,s)\| &= \left\|\tfrac{a}{1-t} - \tfrac{b}{1-s}\right\| = \left\|\tfrac{(1-s)a-(1-t)b}{(1-t)(1-s)}\right\| \\
&= \left\|\tfrac{(1-s)a-(1-s)b+(1-s)b-(1-t)b}{(1-t)(1-s)}\right\| \\
&= \left\|\tfrac{(1-s)(a-b)+(t-s)b}{(1-t)(1-s)}\right\| \leq \tfrac{2}{\delta^2}\|a-b\| + \left(\tfrac{2}{\delta^2}\right)^2|t-s| \\
&\leq \left(\tfrac{2}{\delta^2}\right)^2(\|a-b\|+|t-s|) \\
&\leq \left(\tfrac{2}{\delta^2}\right)^2\sqrt{2}\,\|(a,t)-(b,s)\|_2.
\end{aligned}$$

v) Bajo las condiciones del enunciado,

$$\left\|\pi^{-1}(a) - P\right\|_2^2 = \left(\tfrac{2\|a\|}{\|a\|^2+1}\right)^2 + \left(\tfrac{\|a\|^2-1}{\|a\|^2+1} - 1\right)^2 = \tfrac{4}{\|a\|^2+1} \geq \tfrac{4}{\delta^2+1}$$

y así $\|\pi^{-1}(a) - P\|_2 \geq \frac{2}{\sqrt{\delta^2+1}}$.

vi) Sean $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $(a,t) \in S_X$ con $\|(a,t) - P\|_2 \geq \rho$. Entonces

$$\|a\|^2 = 1 - t^2 \quad \text{y} \quad 1 - t \geq \frac{\rho^2}{2}.$$

En consecuencia,

$$\|\pi(a,t)\|^2 = \tfrac{\|a\|^2}{(1-t)^2} = \tfrac{1-t^2}{(1-t)^2} = \tfrac{1+t}{1-t} \leq \tfrac{4}{\rho^2},$$

de donde $\|\pi(a,t)\| \leq \frac{2}{\rho}$.

vii) Sea $a \in A$ y $(b,t) = \pi^{-1}(a)$. Entonces

$$|t| = \left|\tfrac{\|a\|^2-1}{\|a\|^2+1}\right| = \tfrac{\|a\|+1}{\|a\|^2+1}\left|\|a\| - 1\right| \leq \tfrac{1+\sqrt{2}}{2}\left|\|a\| - 1\right|. \quad \blacksquare$$

En relación con los valores óptimos de las constantes que expresan la condición de Lipschitz para π^{-1} y para la restricción de π a $S_X \backslash B(P,\delta)$ con $\delta \in]0,2]$, caben las siguientes consideraciones:

En primer lugar, observemos que si α es un número real positivo tal que

$$\left\|\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(b)\right\|_2 \leq \alpha\,\|a-b\|\,, \text{ para cualesquiera } a,b \in A,$$

entonces dado $a \in A$, $\|\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(-a)\|_2 \leq 2\alpha\,\|a\|$, es decir,

$$\tfrac{4\|a\|}{\|a\|^2+1} \leq 2\alpha\,\|a\|\,.$$

Luego $\alpha \geq \frac{2}{\|a\|^2+1}$ y la arbitrariedad de a permite concluir que $\alpha \geq 2$. Por tanto, la constante de Lipschitz de π^{-1} es mayor o igual que 2.

Con respecto a la restricción de π a $S_X \backslash B(P,\delta)$, nos centraremos en el caso $0 < \delta < 2$ (si $\delta = 2$ y $\|(a,t) - P\|_2 \geq \delta$ entonces $1 - t \geq 2$, esto es,

$t \leq -1$ y necesariamente $(a,t) = (0,-1)$. Estaríamos ante una situación trivial pues $S_X \backslash B(P,\delta)$ se reduce al punto $-P = (0,-1)$).

Si $t = 1 - \frac{\delta^2}{2}$ y $\|a\| = \sqrt{1-t^2}$, se verifica que

$$\|(a,t) - P\|_2^2 = \|(-a,t) - P\|_2^2 = \|a\|^2 + (t-1)^2 = 2(1-t) = \delta^2$$

y en particular $(a,t), (-a,t) \in S_X \backslash B(P,\delta)$. Además,

$$\|\pi(a,t) - \pi(-a,t)\| = \left\|\tfrac{2a}{1-t}\right\| = \tfrac{2}{\delta^2}\|2a\| = \frac{2}{\delta^2}\|(a,t)-(-a,t)\|_2 .$$

De este modo, podemos afirmar que, la (mínima) constante de Lipschitz de la restricción de π a $S_X \backslash B(P,\delta)$ es mayor o igual que $\frac{2}{\delta^2}$.

Si A es un espacio prehilbertiano, las constantes de Lipschitz coinciden con los valores óptimos que acabamos de mencionar. En efecto, dados (a,t) y $(b,s) \in S_X \backslash B(P,\delta)$

$$\begin{aligned} \|\pi(a,t) - \pi(b,s)\|^2 &= \left\|\tfrac{a}{1-t} - \tfrac{b}{1-s}\right\|^2 = \tfrac{\|a\|^2}{(1-t)^2} + \tfrac{\|b\|^2}{(1-s)^2} - \tfrac{2\langle a,b\rangle}{(1-t)(1-s)} \\ &= \tfrac{1+t}{1-t} + \tfrac{1+s}{1-s} - \tfrac{2\langle a,b\rangle}{(1-t)(1-s)} = \tfrac{2(1-ts)-2\langle a,b\rangle}{(1-t)(1-s)} \\ &= \tfrac{\|(a,t)-(b,s)\|_2^2}{(1-t)(1-s)} \leq \left(\tfrac{2}{\delta^2}\right)^2 \|(a,t)-(b,s)\|_2^2 \end{aligned}$$

y así

$$\|\pi(a,t) - \pi(b,s)\| \leq \tfrac{2}{\delta^2}\|(a,t)-(b,s)\|_2 .$$

De forma similar la constante de Lipschitz de π^{-1} es precisamente 2. Para comprobarlo, denotemos por $\langle \cdot,\cdot \rangle$ el producto escalar de A y observemos que la aplicación $((a,t),(b,s)) \mapsto \langle a,b\rangle + ts$, de $X \times X$ en $\mathbb{R}$, es también un producto escalar que induce la norma considerada en X. Lo denotaremos con el mismo símbolo pues no hay confusión posible. De este modo, dados $a, b \in A$,

$$\left\|\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(b)\right\|_2^2 = \left\|\pi^{-1}(a)\right\|_2^2 + \left\|\pi^{-1}(b)\right\|_2^2 - 2 < \pi^{-1}(a), \pi^{-1}(b) >$$

$$= \left(\frac{2\|a\|}{\|a\|^2+1}\right)^2 + \left(\frac{\|a\|^2-1}{\|a\|^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2\|b\|}{\|b\|^2+1}\right)^2 + \left(\frac{\|b\|^2-1}{\|b\|^2+1}\right)^2 - \frac{8\langle a,b\rangle+2\left(\|a\|^2-1\right)\left(\|b\|^2-1\right)}{\left(\|a\|^2+1\right)\left(\|b\|^2+1\right)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4\|a\|^2+\left(\|a\|^2-1\right)^2}{\left(\|a\|^2+1\right)^2} + \frac{4\|b\|^2+\left(\|b\|^2-1\right)^2}{\left(\|b\|^2+1\right)^2} - \frac{8\langle a,b\rangle+2\left(\|a\|^2-1\right)\left(\|b\|^2-1\right)}{\left(\|a\|^2+1\right)\left(\|b\|^2+1\right)} \\ &= 2 - \frac{8\langle a,b\rangle+2\left(\|a\|^2-1\right)\left(\|b\|^2-1\right)}{\left(\|a\|^2+1\right)\left(\|b\|^2+1\right)} \end{aligned}$$

Haciendo uso de la identidad de polarización obtenemos que

$$\left\|\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(b)\right\|_2^2 = 2 - \frac{2\|a+b\|^2-2\|a-b\|^2+2\left(\|a\|^2-1\right)\left(\|b\|^2-1\right)}{\left(\|a\|^2+1\right)\left(\|b\|^2+1\right)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\left(\|a\|^2+1\right)\left(\|b\|^2+1\right)-2\|a+b\|^2+2\|a-b\|^2-2\left(\|a\|^2-1\right)\left(\|b\|^2-1\right)}{\left(\|a\|^2+1\right)\left(\|b\|^2+1\right)} \\ &= \frac{4\|a\|^2+4\|b\|^2-2\|a+b\|^2+2\|a-b\|^2}{\left(\|a\|^2+1\right)\left(\|b\|^2+1\right)}. \end{aligned}$$

La igualdad del paralelogramo nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \left\|\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(b)\right\|_2^2 &= \frac{2\|a+b\|^2+2\|a-b\|^2-2\|a+b\|^2+2\|a-b\|^2}{\left(\|a\|^2+1\right)\left(\|b\|^2+1\right)} \\ &= \frac{4\|a-b\|^2}{\left(\|a\|^2+1\right)\left(\|b\|^2+1\right)} \leq 4\|a-b\|^2. \end{aligned}$$

Por tanto $\|\pi^{-1}(a) - \pi^{-1}(b)\|_2 \leq 2\|a-b\|$.

A continuación veremos que las constantes de Lipschitz son, en general, más grandes que las correspondientes al caso euclídeo.

Dado un punto a_0 del espacio normado A, la aplicación $a \mapsto a + a_0$, de A en A, será denotada en el siguiente resultado por T_{a_0}.

Proposición 3.2 *Sea A un espacio normado, $a_0 \in S_A$, $X = (A \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$, $P = (0,1)$ y $\rho \in]0,2]$. La aplicación $v = \pi^{-1} \circ T_{a_0} \circ (\pi|_{S_X \setminus B(P,\rho)})$, de $S_X \setminus B(P,\rho)$ en S_X, es lipschitziana y no tiene puntos fijos ni antípodas aproximados, es decir,*

$$\inf\{\|v(x) \pm x\| : x \in S_X \setminus B(P,\rho)\} > 0.$$

Demostración:

En vista de los apartados iii) y iv) del lema anterior, la aplicación v es lipschitziana. En primer lugar observaremos que la imagen de v está contenida en $S_X\backslash B(P,\delta)$ donde $\delta = 2/\sqrt{\left(\frac{2}{\rho}+1\right)^2+1}$. En efecto, dado (a,t) en $S_X\backslash B(P,\rho)$, el apartado vi) del citado lema garantiza que $\|\pi(a,t)\| \leq \frac{2}{\rho}$ y así $\|T_{a_0}(\pi(a,t))\| = \|\pi(a,t)+a_0\| \leq \frac{2}{\rho}+1$. Por tanto, de acuerdo con el apartado v), $\|\pi^{-1}(T_{a_0}(\pi(a,t))) - P\|_2 \geq \delta$, es decir, $v(a,t) \in S_X\backslash B(P,\delta)$. Evidentemente $\delta < \rho$ y, en consecuencia, $S_X\backslash B(P,\rho) \subset S_X\backslash B(P,\delta)$. Por otra parte, en virtud de la afirmación iv), existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|\pi(x)-\pi(x')\| \leq \alpha\,\|x-x'\|_2\,, \text{ para cualesquiera } x,x' \in S_X\backslash B(P,\delta).$$

Fijemos un punto (a,t) en $S_X\backslash B(P,\rho)$. De acuerdo con los comentarios anteriores, los puntos (a,t) y $v(a,t)$ pertenecen a $S_X\backslash B(P,\delta)$. Luego

$$\|\pi(v(a,t))-\pi(a,t)\| \leq \alpha\,\|v(a,t)-(a,t)\|_2$$

y así

$$\|v(a,t)-(a,t)\|_2 \geq \tfrac{1}{\alpha}\,\|T_{a_0}(\pi(a,t))-\pi(a,t)\| = \tfrac{1}{\alpha}\,\|a_0\| = \tfrac{1}{\alpha}.$$

Sólo nos queda por comprobar que $\|v(a,t)+(a,t)\|_2$ es mayor o igual que una cierta constante positiva independiente de (a,t). Como no perdemos generalidad, supondremos que $\rho < \frac{1}{2}$. Si $(-a,-t) \in S_X\backslash B(P,\rho)$, entonces $v(a,t)$ y $(-a,-t)$ son puntos de $S_X\backslash B(P,\delta)$ y en consecuencia

$$\|\pi(v(a,t))-\pi(-a,-t)\| \leq \alpha\,\|v(a,t)+(a,t)\|_2\,,$$

de donde teniendo en cuenta el segundo apartado del lema anterior,

$$\begin{aligned}
\|v(a,t)+(a,t)\|_2 &\geq \tfrac{1}{\alpha}\,\|T_{a_0}(\pi(a,t))-\pi(-a,-t)\| \\
&= \tfrac{1}{\alpha}\,\|\pi(a,t)-\pi(-a,-t)+a_0\| \\
&\geq \tfrac{1}{\alpha}\,(\|\pi(a,t)-\pi(-a,-t)\|-\|a_0\|) \geq \tfrac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Para terminar supongamos que $\|(-a,-t)-P\| < \rho$. En tal caso, es obvio que $|t+1| < \rho$ y por tanto $2-\rho < 1-t$. Así pues,

$$\|\pi(a,t)\| = \tfrac{\|a\|}{1-t} < \tfrac{\rho}{2-\rho} < \tfrac{2}{3}\,\rho$$

y de ello se deduce que

$$|\|T_{a_0}(\pi(a,t))\| - 1| < \tfrac{2}{3}\,\rho. Sea (a',t') = \pi^{-1}(T_{a_0}(\pi(a,t))).$$

El apartado vii) del lema citado garantiza que

$$|t'| \leq \tfrac{1+\sqrt{2}}{2}\,|\|T_{a_0}(\pi(a,t))\| - 1| \leq \tfrac{1+\sqrt{2}}{2}\tfrac{2}{3}\rho < \rho.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \|v(a,t)+(a,t)\|_2 &= \|(a',t')+(a,t)\|_2 \\ &\geq |t+t'| \geq |t| - |t'| = |1-(1+t)| - |t'| > 1-2\rho. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La idea geométrica que inspira la consideración de la aplicación v en la proposición anterior, se ilustra en la siguiente figura:

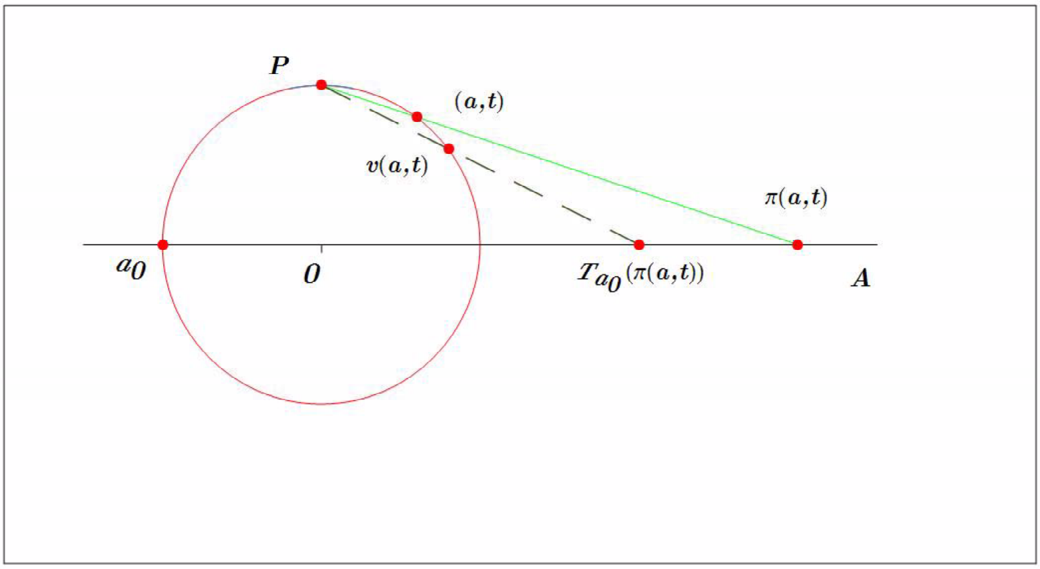


Figura 3.1

El resultado que presentamos a continuación muestra que la existencia de una aplicación v con las propiedades citadas en la proposición precedente es de naturaleza isomórfica.

Lema 3.3 *Sea X_1 un espacio normado, $P \in S_{X_1}$ y supongamos que para cada $\delta \in]0,2]$ existe una aplicación lipschitziana $v_1 : S_{X_1} \backslash B(P,\delta) \to S_{X_1}$ sin puntos fijos ni antípodas aproximados. Consideremos un isomorfismo F, de X_1 sobre un espacio normado X_2 y sea $Q = \frac{F(P)}{\|F(P)\|}$. Entonces cualquiera que sea $\rho \in]0,2]$, existe una aplicación lipschitziana $v_2 : S_{X_2} \backslash B(Q,\rho) \to S_{X_2}$ sin puntos fijos ni antípodas aproximados.*

Demostración:

La aplicación $\varphi : S_{X_1} \to S_{X_2}$ definida por

$$\varphi(x_1) = \frac{F(x_1)}{\|F(x_1)\|}, \text{ para todo } x_1 \in S_{X_1},$$

es biyectiva y su inversa viene dada por

$$\varphi^{-1}(x_2) = \frac{F^{-1}(x_2)}{\|F^{-1}(x_2)\|}, \text{ para todo } x_2 \in S_{X_2}.$$

Luego tanto φ como φ^{-1} son lipschitzianas. Es claro además que $\varphi(P) = Q$ y $\varphi^{-1}(-x_2) = -\varphi^{-1}(x_2)$, para cada $x_2 \in S_{X_2}$ (una propiedad que también verifica φ). Sea $\alpha > 0$ tal que $\|\varphi^{-1}(x_2) - \varphi^{-1}(y_2)\| \leq \alpha \|x_2 - y_2\|$, para cualesquiera $x_2, y_2 \in S_{X_2}$. También se tiene entonces que

$$\left\|\varphi^{-1}(x_2) + \varphi^{-1}(y_2)\right\| \leq \alpha \|x_2 + y_2\|,$$

para cualesquiera $x_2, y_2 \in S_{X_2}$.

Dado $\rho \in]0,2]$, la continuidad de φ en el punto P nos proporciona un número real $\delta > 0$ tal que $\varphi(S_{X_1} \cap B(P,\delta)) \subset S_{X_2} \cap B(Q,\rho)$. Equivalentemente, $S_{X_2} \backslash B(Q,\rho) \subset \varphi(S_{X_1} \backslash B(P,\delta))$ y así

$$\varphi^{-1}(S_{X_2} \backslash B(Q,\rho)) \subset S_{X_1} \backslash B(P,\delta).$$

Sea $v_1 : S_{X_1} \backslash B(P, \delta) \to S_{X_1}$ una aplicación lipschitziana sin puntos fijos ni antípodas aproximados y $\beta = \inf \{\|v_1(x_1) \pm x_1\| : x_1 \in S_{X_1} \backslash B(P, \delta)\}$. La aplicación $v_2 = \varphi \circ v_1 \circ (\varphi^{-1}|_{S_{X_2} \backslash B(Q,\rho)})$, de $S_{X_2} \backslash B(Q, \rho)$ en S_{X_2}, es obviamente lipschitziana y

$$\begin{aligned} \|v_2(x_2) \pm x_2\| &\geq \tfrac{1}{\alpha} \left\|\varphi^{-1}(v_2(x_2)) \pm \varphi^{-1}(x_2)\right\| \\ &= \tfrac{1}{\alpha} \left\|v_1(\varphi^{-1}(x_2)) \pm \varphi^{-1}(x_2)\right\| \geq \tfrac{\beta}{\alpha}, \end{aligned}$$

para todo $x_2 \in S_{X_2} \backslash B(Q, \rho)$. ■

La existencia de una aplicación v del tipo que venimos considerando no requiere más condición que la trivialmente necesaria. A saber, que la dimensión del espacio normado en cuestión sea mayor que uno. Confirmamos este hecho en el siguiente resultado:

Teorema 3.4 *Sea X un espacio normado de dimensión mayor o igual que dos, $x_0 \in S_X$ y $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho \leq 2$. Entonces existe una aplicación lipschitziana $v : S_X \backslash B(x_0, \rho) \to S_X$ tal que*

$$\inf \{\|v(x) \pm x\| : x \in S_X \backslash B(x_0, \rho)\} > 0.$$

Demostración:

Sea $x_0^* \in S_{X^*}$ tal que $x_0^*(x_0) = 1$, $A = \ker x_0^*$ y F, de $A \times \mathbb{R}$ en X, la aplicación dada por $F(a, t) = a + t x_0$, para todo $(a, t) \in A \times \mathbb{R}$. Consideremos además la aplicación $G : X \to A \times \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = (x - x_0^*(x)x_0, x_0^*(x)), \text{ para todo } x \in X.$$

Evidentemente F y G son lineales y continuas. Por otra parte,

$$\begin{aligned} (F \circ G)(x) &= x - x_0^*(x)x_0 + x_0^*(x)x_0 = x, \text{ para todo } x \in X, \\ (G \circ F)(a, t) &= (a + t x_0 - x_0^*(a + t x_0)x_0, x_0^*(a + t x_0)) \\ &= (a, t), \text{ para todo } (a, t) \in A \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Luego F es un isomorfismo que claramente transforma el punto $P = (0, 1)$ en x_0. Todo se reduce por tanto a aplicar la Proposición 3.2 y el Lema 3.3.

■

3.2 Refinamientos dependientes de la dimensión

Las aplicaciones v que hemos estudiado en la sección precedente presentan la ventaja de su total generalidad, pues no imponen sobre X más restricción que la evidentemente necesaria, esto es, que su dimensión sea mayor o igual que dos. Hay que reconocer sin embargo que al mismo tiempo exhiben el inconveniente de no estar definidas en toda la esfera unidad de X. Este último hecho viene impuesto por lo que ocurre en espacios de dimensión impar. Concretamente si k es un natural arbitrario, toda aplicación continua de la esfera unidad de $\mathbb{R}^{2k-1}$en sí misma posee un punto fijo o transforma algún punto en su opuesto. Esto es obvio, como ya se ha sugerido, para $k = 1$ y para $k > 1$ puede consultarse por ejemplo en el texto de J.Dugundji ([12, Corollary XVI 3.4]).

En este apartado comprobaremos que si la dimensión de X es par o infinita, existen de hecho aplicaciones lipschitzianas $v : S_X \to S_X$ sin puntos fijos ni antípodas aproximados, definidas como puede verse, en toda la esfera unidad de X.

El resultado que acabamos de mencionar es inmediato como enseguida mostraremos en dimensión par y para dimensión infinita es también conocido (véase a este respecto [26]). Sin embargo, incorporaremos una demostración novedosa que simplifica notablemente la contenida en tal referencia. La herramienta crucial seguirá siendo un profundo resultado de Benyamini y Sternfeld ([4]), según el cual la esfera unidad de todo espacio normado infinito dimensional es un retracto de Lipschitz de la bola unidad. Recordemos que una **retracción** de la bola unidad en la esfera unidad es una aplicación continua r, de B_X en S_X, tal que $r(x) = x$, para todo $x \in S_X$. Como muestra de la utilidad de las técnicas desarrolladas, merece la pena resaltar que el Teorema 3.4 ha podido probarse sin hacer uso de [4].

Dado un número natural k, la aplicación $v : S_{\mathbb{R}^{2k}} \to S_{\mathbb{R}^{2k}}$ dada por

$$v(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2k}) = (x_{k+1}, \ldots, x_{2k}, -x_1, \ldots, -x_k)$$

es lipschitziana y $\|v(x) \pm x\| = \sqrt{2}$, para todo $x \in \mathbb{R}^{2k}$. En realidad, v es la restricción a $S_{\mathbb{R}^{2k}}$ de un automorfismo isométrico de $\mathbb{R}^{2k}$ que además transforma cada vector $x \in \mathbb{R}^{2k}$ en un vector ortogonal a x.

Razonando como en el apartado anterior se comprueba, con mayor facilidad en este caso, que la existencia de aplicaciones lipschitzianas $v : S_X \to S_X$ sin puntos fijos ni antípodas aproximados es una propiedad isomórfica. Si X es un espacio normado de dimensión par es claro, en vista de los comentarios precedentes sobre el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2k}$, que existen aplicaciones lipschitzianas $v : S_X \to S_X$ sin puntos fijos ni antípodas aproximados.

Abordamos a continuación el caso infinito-dimensional:

Teorema 3.5 *Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces existe una aplicación lipschitziana $v : S_X \to S_X$ tal que*

$$\inf \{\|v(x) \pm x\| : x \in S_X\} > 0.$$

Demostración:

Teniendo en cuenta el carácter isomórfico de la existencia de una tal aplicación v, podemos suponer sin perder generalidad que $X = (A \times \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$, siendo A un espacio normado de dimensión infinita. Sea $r : B_A \to S_A$ una retracción lipschitziana y consideremos la aplicación $v : S_X \to S_X$ definida por $v(a,t) = (t\, r(a), -1)$, para todo $(a,t) \in S_X$.

Si α es la constante de Lipschitz de r y $(a,t),(b,s) \in S_X$, es claro que

$$\begin{aligned}
\|v(a,t) - v(b,s)\|_\infty &= \|(t\, r(a), -1) - (s\, r(b), -1)\|_\infty \\
&= \|t\, r(a) - s\, r(b)\| = \|t\, r(a) - t\, r(b) + t\, r(b) - s\, r(b)\| \\
&\leq \|r(a) - r(b)\| + |t - s| \\
&\leq \alpha\, \|a - b\| + |t - s| \leq (\alpha + 1)\ \|(a,t) - (b,s)\|_\infty
\end{aligned}$$

y por tanto v es lipschitziana.

Observemos ahora que si $a \in A$ y $0 < \|a\| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|r(a) - a\| &= \left\| r(a) - \tfrac{a}{\|a\|} + \tfrac{a}{\|a\|} - a \right\| = \left\| r(a) - r(\tfrac{a}{\|a\|}) + \tfrac{a}{\|a\|} - a \right\| \\
&\leq \alpha \left\| a - \tfrac{a}{\|a\|} \right\| + \left\| \tfrac{a}{\|a\|} - a \right\| = (\alpha + 1)\,(1 - \|a\|).
\end{aligned}$$

En consecuencia, bajo la condición $\frac{\alpha}{\alpha+1} < \|a\| \leq 1$ (que obviamente equivale a las desigualdades $0 \leq 1 - \|a\| < \frac{1}{\alpha+1}$) se tiene que

$$\|r(a) + a\| = \|2r(a) + a - r(a)\| \geq 2 - \|r(a) - a\| \geq 2 - (1+\alpha)\,(1 - \|a\|) > 1.$$

Por otra parte si $a \in A$ y $\|a\| \leq \frac{\alpha}{\alpha+1}$, entonces $\|r(a) + a\| \geq 1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}$. Concluimos pues que

$$\|r(a) + a\| \geq \tfrac{1}{\alpha+1}\,, \ \text{para todo } a \in B_A.$$

Fijemos $(a,t) \in S_X$ y notemos que $\|a\| = 1$ ó $|t| = 1$.

Si $t = 1$,

$$\|v(a,t) - (a,t)\|_\infty = \|(r(a), -1) - (a, 1)\|_\infty = \|(r(a) - a, -2)\|_\infty = 2$$

y

$$\|v(a,t)+(a,t)\|_\infty = \|(r(a)+a,0)\|_\infty = \|(r(a)+a\| \geq \tfrac{1}{\alpha+1}\,.$$

Análogamente si $t=-1$,

$$\|v(a,t)-(a,t)\|_\infty = \|(-r(a),-1)-(a,-1)\|_\infty = \|r(a)+a\| \geq \tfrac{1}{\alpha+1}$$

y

$$\|v(a,t)+(a,t)\|_\infty = \|(-r(a)+a,-2)\|_\infty = 2.$$

Finalmente supongamos que $\|a\|=1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|v(a,t)\pm(a,t)\|_\infty &= \|(t\,r(a),-1)\pm(a,t)\|_\infty \\
&= \|(t\,a,-1)\pm(a,t)\|_\infty = \|((t\pm1)a,-1\pm t)\|_\infty \\
&= \max\{|t\pm1|\,,|-1\pm t|\} \geq 1.
\end{aligned}$$

Concluimos que $\inf\{\|v(x)\pm x\| : x\in S_X\}>0$. ■

3.3 Isometrías lineales y renormaciones

Las aplicaciones entre esferas sin puntos fijos ni antípodas que necesitaremos en esta memoria tienen que ser uniformemente continuas pero no se requiere ninguna condición adicional de tipo algebraico. No obstante, debemos señalar que en ciertas situaciones, existen aplicaciones del tipo mencionado que son restricciones de aplicaciones lineales a la esfera unidad del espacio en cuestión y como consecuencia, dado que transforman la esfera en sí misma son de hecho isometrías. Esto puede ilustrarse de forma muy sencilla considerando un espacio normado complejo X. En tal caso, la aplicación $x\mapsto ix$ es una isometría lineal cuya restricción a la esfera unidad de X no tiene puntos fijos ni antípodas aproximados:

$$\|ix\pm x\| = \sqrt{2},\ \text{ para todo } x\in S_X.$$

Evidentemente, un espacio normado real de dimensión finita impar no puede encontrarse en la situación precedente, más aún, como ya se dijo en la sección anterior, cualquier aplicación continua de su esfera unidad en sí misma posee algún punto fijo o transforma un punto en su antípoda. Sin embargo, cabe preguntarse por la posible existencia de isometrías lineales sin puntos fijos ni antípodas aproximados sobre la esfera en el caso de espacios reales de dimensión par o infinita. Enseguida mostraremos que, en general, la respuesta es negativa para ambas situaciones.

En primer lugar recordaremos algunos conceptos básicos:

Dado un espacio normado X y un punto $x_0 \in S_X$, un **funcional de soporte** en x_0 es un elemento f de X^* tal que $\|f\| = 1 = f(x_0)$. Recuérdese que ya se han utilizado este tipo de funcionales en capítulos anteriores. El Teorema de Hahn-Banach garantiza la existencia de funcionales de soporte en todo punto de la esfera unidad de X.

Hemos de mencionar que el conjunto

$$\{f \in X^* : \|f\| = 1 = f(x_0)\}$$

puede consistir en un único elemento o ser lo suficientemente amplio como para separar los puntos de X. Estas dos situaciones extremas son conocidas en la literatura con nombres especiales:

Se dice que X es **suave en un punto** $x_0 \in S_X$ si existe un único funcional de soporte en x_0 (también se dice en este caso que la norma de X es suave en el punto x_0 o que x_0 es un punto de suavidad de X). Si X es suave en cada punto de S_X entonces se dice simplemente que X (o la norma de X) es **suave**.

Por otra parte, decimos que un punto $x_0 \in S_X$ es un **vértice** de B_X si el conjunto

$$\{f \in X^* : \|f\| = 1 = f(x_0)\}$$

separa los puntos de X, es decir, si la condición $f(x) = 0$, para todo funcional de soporte f en x_0 implica que $x = 0$.

Es un hecho evidente que todo subespacio de un espacio normado suave es también suave. De forma análoga, si un subespacio de X contiene un vértice de la bola unidad de X, tal punto es también un vértice de la bola unidad del subespacio.

La suavidad de un espacio X en un punto $x_0 \in S_X$ es equivalente a la diferenciabilidad, en el sentido de Gâteaux, de la norma de X en el punto x_0, es decir, a la existencia de un elemento $f \in X^*$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \tfrac{\|x_0+tv\|-1}{t} = \operatorname{Re} f(v), \text{ para todo } v \in X.$$

En realidad, la existencia de $\lim_{t\to 0} \frac{\|x_0+tv\|-1}{t}$ para todo $v \in X$ implica automáticamente que la aplicación $v \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{\|x_0+tv\|-1}{t}$ es $\mathbb{R}$-lineal y continua. Además, tal aplicación es la parte real del único funcional de soporte en el punto x_0 (de hecho, el único funcional de soporte en x_0 si X es un espacio normado real).

Como consecuencia, la norma de X es Gâteaux diferenciable (en todo punto de la esfera unidad) si, y solo si, X es suave.

Los espacios prehilbertianos constituyen la familia más sencilla de espacios suaves. En concreto, si x_0 es un elemento no nulo de un espacio prehilbertiano X y $u \in X$, entonces cualquiera que sea $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\tfrac{\|x_0+su\|-\|x_0\|}{s} = \tfrac{\|x_0+su\|^2-\|x_0\|^2}{s(\|x_0+su\|+\|x_0\|)} = \tfrac{s\|u\|^2+2\operatorname{Re}\langle x_0,u\rangle}{\|x_0+su\|+\|x_0\|}$$

y en consecuencia

$$\lim_{s\to 0} \tfrac{\|x_0+su\|-\|x_0\|}{s} = \operatorname{Re}\langle \tfrac{x_0}{\|x_0\|}, u\rangle. \tag{3.2}$$

En particular, la norma de X es Gâteaux diferenciable en todo punto x_0 de la esfera unidad de X y el funcional de soporte en dicho punto no es otro que la aplicación $u \mapsto \langle x_0, u\rangle$, de X en $\mathbb{K}$.

De hecho, aunque no será necesario en lo que sigue, es bien sabido que la norma de todo espacio prehilbertiano es uniformemente Fréchet diferenciable en la esfera unidad de X y por tanto uniformemente suave.

Obsérvese además que la igualdad (3.2) nos dice en definitiva que la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(s) = \|x_0 + su\|$, es derivable en cero con $\varphi'(0) = \mathrm{Re}\langle \frac{x_0}{\|x_0\|}, u\rangle$.

Ni que decir tiene que todos los conceptos mencionados, relativos a vértices, suavidad y diferenciabilidad son estables por isomorfismos isométricos.

Lema 3.6 *Sea X un espacio prehilbertiano y $x_0 \in S_X$. Consideremos un número real t y un vector y, ortogonal a x_0. Entonces $|t| + \sqrt{3}\,\|y\| \le 2\,\|tx_0 + y\|$.*

Demostración:

Basta observar las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
|t| + \sqrt{3}\,\|y\| \quad &\le \quad 2\,\|tx_0 + y\| \Leftrightarrow \left(|t| + \sqrt{3}\,\|y\|\right)^2 \le 4\,\|tx_0 + y\|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 + 2\sqrt{3}\,|t|\,\|y\| + 3\,\|y\|^2 \le 4t^2 + 4\,\|y\|^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 3t^2 - 2\sqrt{3}\,|t|\,\|y\| + \|y\|^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\,|t| - \|y\|\right)^2 \ge 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Bajo las hipótesis y la notación del lema precedente sea

$$E = \mathrm{co}(B_X \cup \{-2x_0, 2x_0\}).$$

Consideremos además los conjuntos

$$E^+ = \{(1-s)a + 2sx_0 : s \in [0,1],\ a \in B_X\} \quad \text{y}$$

$$E^- = \{(1-s)a - 2sx_0 : s \in [0,1],\ a \in B_X\}.$$

Las siguientes figuras representan las secciones de los conjuntos anteriores correspondientes a los subespacios bidimensionales de X que contienen a x_0.

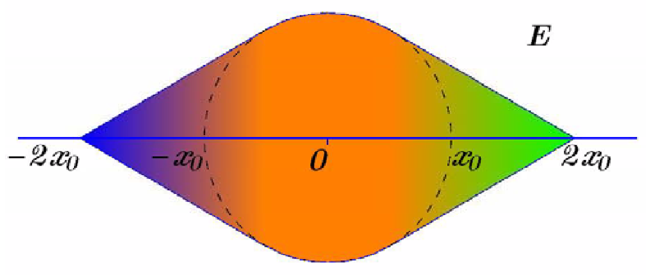
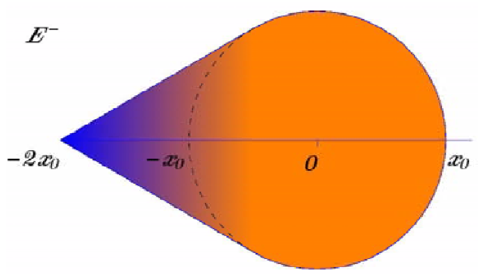


Figura 3.2



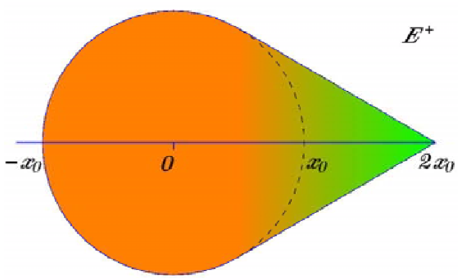


Figura 3.3 Figura 3.4

Evidentemente, $E^- = -E^+$ y enseguida comprobaremos que

$$E = E^+ \cup E^-,$$

un hecho por otra parte muy intuitivo. Dado $x \in E$, existen $a_1, \ldots, a_n$ en B_X y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2} \in [0, 1]$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} = 1$, tales que

$$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n + 2\lambda_{n+1} x_0 - 2\lambda_{n+2} x_0.$$

Supongamos que $\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} \geq 0$. La igualdad $\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} = 1$ equivale a afirmar que $\lambda_{n+1} = 1$ (y que los restantes escalares son cero), por lo que en tal caso $x = 2x_0$ y en particular $x \in E^+$. Nos centramos pues en la situación $\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} < 1$. Puesto que

$$x = (1-(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}))\left(\tfrac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}} a_1 + \cdots + \tfrac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}} a_n\right) + 2(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}) x_0$$

y $\left\|\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}}a_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}}a_n\right\| \leq \frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}} = \frac{1-\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}}{1-\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}} \leq 1$, también se tiene que $x \in E^+$.

Finalmente si $\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} < 0$, el razonamiento anterior (aplicado a $-x$) garantiza que $-x \in E^+$, o equivalentemente que $x \in E^-$.

Se prueba así que $E \subset E^+ \cup E^-$. La inclusión restante es trivialmente cierta.

En el resultado que sigue continuaremos bajo las hipótesis y la notación del lema anterior. También estarán presentes los conjuntos E, E^+ y E^- que acabamos de considerar.

Lema 3.7 *Supongamos que $tx_0 + y \in E$. Entonces $|t| + \sqrt{3}\,\|y\| \leq 2$ y si $\|y\| \geq \sqrt{3}\,|t|$ se verifica de hecho que $\|tx_0 + y\| \leq 1$.*

Demostración:

Puesto que $E = E^+ \cup E^-$ y $E^- = -E^+$, la prueba se reduce al caso dado por la condición (que asumiremos a partir de este momento) $tx_0+y \in E^+$. En tal situación, existen $a \in B_X$ y $s \in [0,1]$ tales que $tx_0 + y = (1-s)a + 2sx_0$. Se puede suponer que $\|a\| = 1$ pues, evidentemente existe $\xi \in \mathbb{R}$ con $\xi \geq 0$, tal que $\|a + \xi(a - 2x_0)\| = 1$. Además, para tal ξ (en realidad, para cada ξ no negativo)

$$(1-s)a + 2sx_0 = \left(1 - \tfrac{\xi+s}{\xi+1}\right)(a + \xi(a - 2x_0)) + 2\tfrac{\xi+s}{\xi+1}x_0,$$

con lo que bastaría sustituir a por $a + \xi(a - 2x_0)$ y s por $\frac{\xi+s}{\xi+1}$.

Por otra parte si $s = 0$, se tiene que $tx_0 + y = a$ y en particular, $\|tx_0 + y\| \leq 1$. Supondremos por tanto que $0 < s \leq 1$.

Es claro que $a = t_0x_0+y_0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ y un cierto vector y_0 ortogonal a x_0. Así pues,

$$tx_0 + y = (1-s)(t_0x_0 + y_0) + 2sx_0 = ((1-s)t_0 + 2s)\,x_0 + (1-s)y_0.$$

Multiplicando escalarmente por el vector x_0, obtenemos que $t = (1-s)t_0+2s$ y en consecuencia $y = (1-s)y_0$. Por otra parte, de acuerdo con el lema anterior

$$|t_0| + \sqrt{3}\,\|y_0\| \leq 2\,\|t_0x_0 + y_0\| = 2\,\|a\| = 2.$$

Con objeto de probar la primera desigualdad del enunciado supongamos $t \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} |t| + \sqrt{3}\,\|y\| &= (1-s)t_0 + 2s + \sqrt{3}(1-s)\,\|y_0\| \\ &= (1-s)\left(t_0 + \sqrt{3}\,\|y_0\|\right) + 2s \leq 2(1-s) + 2s = 2. \end{aligned}$$

De forma análoga, si $t < 0$,

$$\begin{aligned} |t| + \sqrt{3}\,\|y\| &= -(1-s)t_0 - 2s + \sqrt{3}(1-s)\,\|y_0\| \\ &\leq (1-s)\left(-t_0 + \sqrt{3}\,\|y_0\|\right) \leq (1-s)\left(|t_0| + \sqrt{3}\,\|y_0\|\right) \\ &\leq 2(1-s) \leq 2. \end{aligned}$$

En el resto de la demostración supondremos como indica el enunciado que $\|y\| \geq \sqrt{3}\,|t|$. La condición $\|a\| = 1$ que admitimos al principio, sin pérdida de generalidad, implica que $\|y_0\|^2 = 1 - t_0^2$. De este modo, la desigualdad que acabamos de comentar puede expresarse en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \|y\| &\geq \sqrt{3}\,|t| \Leftrightarrow \|y\|^2 \geq 3t^2 \Leftrightarrow (1-s)^2\,\|y_0\|^2 \geq 3\left((1-s)t_0 + 2s\right)^2 \\ &\Leftrightarrow (1-s)^2(1-t_0^2) \geq 3\left((1-s)t_0 + 2s\right)^2 \\ &\Leftrightarrow (1-s)^2 - (1-s)^2t_0^2 \geq 3(1-s)^2t_0^2 + 12s(1-s)t_0 + 12s^2 \\ &\Leftrightarrow 4(1-s)^2t_0^2 + 12s(1-s)t_0 + 12s^2 - (1-s)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (2(1-s)t_0 + 3s)^2 - 9s^2 + 12s^2 - (1-s)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (2(1-s)t_0 + 3s)^2 - 1 + 2s + 2s^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (2(1-s)t_0 + 3s)^2 \leq 1 - 2s - 2s^2. \end{aligned}$$

En particular $(2(1-s)t_0+3s)^2 \leq 1$ y así $2(1-s)t_0+3s \leq 1$. De ello se deduce que $4(1-s)t_0 \leq 2-6s$ y por tanto $5s+4(1-s)t_0 \leq 2-s$. Es pues claro que $5s+4(1-s)t_0 \leq 2$ y ésta es en realidad la desigualdad que necesitamos:

$$\begin{aligned} \|tx_0+y\|^2 &\leq 1 \Leftrightarrow \|(1-s)a+2sx_0\|^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow (1-s)^2+4s^2+4s(1-s)t_0 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -2s+5s^2+4s(1-s)t_0 \leq 0 \Leftrightarrow 5s+4(1-s)t_0 \leq 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Haremos uso de los lemas anteriores para ejemplificar la existencia de normas equivalentes en todo espacio prehilbertiano real tales que cualquier isometría lineal posee un punto fijo de norma uno o transforma un punto de norma uno en su opuesto.

Sea X un espacio prehilbertiano real, $x_0 \in S_X$ y $E = \mathrm{co}(B_X \cup \{-2x_0, 2x_0\})$. El conjunto E es claramente absorbente y por tanto podemos considerar su correspondiente funcional de Minkowski:

$$p_E(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : x \in \lambda E\} \quad (x \in X).$$

Como veremos a continuación, es relativamente fácil encontrar la expresión de p_E en términos de la norma de X.

Proposición 3.8 *En las condiciones que acabamos de precisar se verifica que*

$$p_E(tx_0+y) = \begin{cases} \frac{|t|+\sqrt{3}\|y\|}{2} & si \;\; \|y\| \leq \sqrt{3}\,|t| \\ \|tx_0+y\| & si \;\; \|y\| \geq \sqrt{3}\,|t| \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}, y \in \{x_0\}^\perp).$$

Como consecuencia, p_E es una norma sobre X equivalente a la norma de partida.

Demostración:

Fijemos un número real t y un vector y ortogonal a x_0. Supongamos en primer lugar que $0 < \|y\| \leq \sqrt{3}\,|t|$. Bajo tales condiciones, empecemos con el caso $t > 0$. Sea $a = \frac{1}{2}\,x_0 + \frac{\sqrt{3}}{2\|y\|}\,y$. Evidentemente $\|a\| = 1$ y para $s = \frac{\sqrt{3}t - \|y\|}{\sqrt{3}t + 3\|y\|}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(1-s)a + 2sx_0 &= (\tfrac{1-s}{2} + 2s)\,x_0 + (1-s)\tfrac{\sqrt{3}}{2\|y\|}\,y \\
&= (\tfrac{2\|y\|}{\sqrt{3}t+3\|y\|} + \tfrac{2\sqrt{3}t - 2\|y\|}{\sqrt{3}t+3\|y\|})\,x_0 + \tfrac{4\|y\|}{\sqrt{3}t+3\|y\|}\tfrac{\sqrt{3}}{2\|y\|}\,y \\
&= \tfrac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{3}t+3\|y\|}\,x_0 + \tfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}t+3\|y\|}\,y = \tfrac{2}{t+\sqrt{3}\|y\|}\,(tx_0 + y).
\end{aligned}$$

Puesto que $(1-s)a + 2sx_0 \in E$ (ya que $s \in [0,1]$), de lo anterior se deduce que $tx_0 + y \in \frac{t+\sqrt{3}\|y\|}{2}\,E$ y en consecuencia $p_E(tx_0 + y) \leq \frac{t+\sqrt{3}\|y\|}{2}$. En el caso $t < 0$, consideramos $s = \frac{-\sqrt{3}t - \|y\|}{-\sqrt{3}t + 3\|y\|}$ y $a = -\frac{1}{2}\,x_0 + \frac{\sqrt{3}}{2\|y\|}\,y$ (nótese que de nuevo $s \in [0,1]$ y $\|a\| = 1$). Razonando como antes,

$$\begin{aligned}
(1-s)a - 2sx_0 &= -(\tfrac{1-s}{2} + 2s)\,x_0 + (1-s)\tfrac{\sqrt{3}}{2\|y\|}\,y \\
&= -(\tfrac{2\|y\|}{-\sqrt{3}t+3\|y\|} - \tfrac{2\sqrt{3}t + 2\|y\|}{-\sqrt{3}t+3\|y\|})\,x_0 + \tfrac{4\|y\|}{-\sqrt{3}t+3\|y\|}\tfrac{\sqrt{3}}{2\|y\|}\,y \\
&= \tfrac{2\sqrt{3}t}{-\sqrt{3}t+3\|y\|}\,x_0 + \tfrac{2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}t+3\|y\|}\,y = \tfrac{2}{-t+\sqrt{3}\|y\|}\,(tx_0 + y)
\end{aligned}$$

y por consiguiente $p_E(tx_0 + y) \leq \frac{-t+\sqrt{3}\|y\|}{2}$. En definitiva si $0 < \|y\| \leq \sqrt{3}\,|t|$, se tiene que $p_E(tx_0 + y) \leq \frac{|t|+\sqrt{3}\|y\|}{2}$. Esta desigualdad se cumple trivialmente si $t = 0$ e $y = 0$, pues $p_E(0) = 0$ ($0 \in \lambda E$, para todo $\lambda > 0$). Por otra parte, si $y = 0$ y t es cualquier número real no nulo,

$$tx_0 + y = tx_0 = \tfrac{|t|}{2} 2\tfrac{t}{|t|}x_0 \in \tfrac{|t|}{2}E$$

y así $p_E(tx_0 + y) \leq \frac{|t|}{2} = \frac{|t|+\sqrt{3}\|y\|}{2}$. Queda probada por tanto la desigualdad $p_E(tx_0 + y) \leq \frac{|t|+\sqrt{3}\|y\|}{2}$ en la situación $\|y\| \leq \sqrt{3}\,|t|$.

Por otra parte, si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $tx_0 + y \in \lambda E$, entonces $\frac{t}{\lambda}x_0 + \frac{1}{\lambda}y \in E$ y de acuerdo con el lema anterior, $\left|\frac{t}{\lambda}\right| + \frac{\sqrt{3}}{\lambda}\,\|y\| \leq 2$ de donde $\frac{|t|+\sqrt{3}\|y\|}{2} \leq \lambda$. Luego

$\frac{|t|+\sqrt{3}\|y\|}{2} \leq p_E(tx_0+y)$. Acabamos de probar de este modo que

$$p_E(tx_0+y) = \tfrac{|t|+\sqrt{3}\|y\|}{2}, \quad \text{si } \|y\| \leq \sqrt{3}\,|t|\,.$$

Supongamos ahora $\|y\| \geq \sqrt{3}\,|t|$. En el caso no trivial, $tx_0+y \neq 0$, es claro que $\frac{tx_0+y}{\|tx_0+y\|} \in E$ y en consecuencia $p_E(tx_0+y) \leq \|tx_0+y\|$, lo que también es válido si $tx_0+y=0$ (teniendo en cuenta una vez más que $p_E(0)=0$). Para demostrar la desigualdad contraria, consideremos un número real $\lambda > 0$ tal que $tx_0+y \in \lambda E$. Entonces $\frac{t}{\lambda}x_0 + \frac{y}{\lambda} \in E$ y además

$$\left\|\frac{y}{\lambda}\right\| = \frac{\|y\|}{\lambda} \geq \frac{\sqrt{3}\,|t|}{\lambda} = \sqrt{3}\left|\frac{t}{\lambda}\right|.$$

La última parte del lema anterior permite afirmar entonces que

$$\left\|\frac{t}{\lambda}x_0 + \frac{y}{\lambda}\right\| \leq 1$$

y así $\|tx_0+y\| \leq \lambda$. Luego $\|tx_0+y\| \leq p_E(tx_0+y)$ y queda demostrado que

$$p_E(tx_0+y) = \|tx_0+y\|\,, \quad \text{si } \|y\| \geq \sqrt{3}\,|t|\,.$$

De acuerdo con la expresión de p_E que acabamos de obtener, se tiene que $p_E(\alpha x) = |\alpha|\, p_E(x)$ para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in X$. Además, $p_E(x)=0$ si, y sólo si, $x=0$. Por otra parte, la convexidad de E nos dice que la aplicación p_E es subaditiva. Se trata pues de una norma sobre X que evidentemente cumple la siguientes desigualdades:

$$p_E(x) \leq \|x\| \leq 2\,p_E(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Luego p_E es equivalente a la norma de partida. ■

A continuación mostraremos que la esfera unidad de X correspondiente a la norma p_E contiene exactamente dos vértices y el resto son puntos de suavidad.

Proposición 3.9 *Sea* $x \in X \backslash \{-2x_0, 2x_0\}$ *con* $p_E(x) = 1$*. Entonces* p_E *es suave en* x*. Además,* $-2x_0$ *y* $2x_0$ *son vértices de* E *(la bola unidad de* X *relativa a* p_E*).*

Demostración:

Consideremos $t \in \mathbb{R}$ e $y \in X$ con $\langle x_0, y\rangle = 0$, tales que $x = tx_0 + y$. Es inmediato, en vista de las condiciones anteriores, que $y \neq 0$. Supongamos en primer lugar que $\|y\| < \sqrt{3}\,|t|$. En particular, también se tiene que $t \neq 0$. Sea $u \in X$ y expresémoslo en la forma $u = \xi x_0 + w$, para convenientes $\xi \in \mathbb{R}$ y $w \in X$ ortogonal a x_0. Dado un número real s,

$$x + su = tx_0 + y + s(\xi x_0 + w) = (t + s\xi)x_0 + y + sw$$

y para s suficientemente pequeño, $\|y + sw\| < \sqrt{3}\,|t + s\xi|$. Luego, en virtud de la proposición anterior, para tales valores de s

$$p_E(x + su) = \tfrac{|t+s\xi|+\sqrt{3}\|y+sw\|}{2}$$

y así

$$\lim_{s\to 0} \tfrac{p_E(x+su)-1}{s} = \tfrac{t}{2|t|}\,\xi + \tfrac{\sqrt{3}}{2\|y\|}\,\langle y, w\rangle\,.$$

De forma análoga, si $\|y\| > \sqrt{3}\,|t|$ se tiene también $\|y + sw\| > \sqrt{3}\,|t + s\xi|$ para s suficientemente pequeño y en tal caso $p_E(x + su) = \|x + su\|$. En consecuencia

$$\lim_{s\to 0} \tfrac{p_E(x+su)-1}{s} = \langle \tfrac{x}{\|x\|}, u\rangle$$

Finalmente, supongamos que $\|y\| = \sqrt{3}\,|t|$ (puesto que, como ya se dijo, $y \neq 0$, la igualdad anterior garantiza que $t \neq 0$). Sean

$$\begin{aligned} A_1 &= \{s \in \mathbb{R} : \|y + sw\| \leq \sqrt{3}\,|t + s\xi|\} \quad y \\ A_2 &= \{s \in \mathbb{R} : \|y + sw\| \geq \sqrt{3}\,|t + s\xi|\}. \end{aligned}$$

Evidentemente $0 \in A_1 \cap A_2$ y $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$. Por otra parte, las aplicaciones $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(s) = \tfrac{|t+s\xi|+\sqrt{3}\|y+sw\|}{2}\,, \;\; f_2(s) = \|x+su\|\,, \;\text{para todo } s \in \mathbb{R},$$

son derivables en cero y es inmediato que $f_1'(0) = f_2'(0)$. Además, f_1 y f_2 coinciden en $A_1 \cap A_2$. De ello se deduce que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \begin{cases} f_1(s) & \text{si} \quad s \in A_1 \\ f_2(s) & \text{si} \quad s \in A_2 \end{cases}$$

es derivable en 0 con $f'(0) = f_1'(0) = f_2'(0)$. Puesto que $f(s) = p_E(x+su)$, para todo $s \in \mathbb{R}$, acabamos de probar que p_E es suave en el punto x (no se olvide que u es arbitrario en el razonamiento anterior).

En definitiva, dado $x = tx_0 + y \in X \backslash \{-2x_0, 2x_0\}$ con $p_E(x) = 1$, se tiene, en efecto, que p_E es suave en el punto x. Además, si x^* es el correspondiente funcional de soporte ($x^*(x) = 1 = |||x^*|||$, siendo $|||\cdot|||$ la norma dual de p_E), se verifica que

$$x^*(u) = \begin{cases} \frac{t}{2|t|}\,\xi + \frac{\sqrt{3}}{2\|y\|}\,\langle y, w\rangle & \text{si} \quad \|y\| \le \sqrt{3}\,|t| \\ \langle \frac{x}{\|x\|}, u\rangle & \text{si} \quad \|y\| \ge \sqrt{3}\,|t| \end{cases}$$

para todo $u = \xi x_0 + w \in X$.

A partir de lo anterior, es fácil encontrar también funcionales de soporte en el punto $2x_0$. Concretamente, cualquiera que sea $a \in X$ con $\|a\| \le 1$ y $\langle a, x_0\rangle = 0$, la aplicación $x_a^* : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$x_a^*(\xi x_0 + w) = \tfrac{\xi}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\langle a, w\rangle \qquad (\xi \in \mathbb{R}, w \in \{x_0\}^{\perp})$$

es un funcional de soporte en el punto $2x_0$.

Fijemos un número real ξ y un vector w ortogonal a x_0. Si $x_a^*(\xi x_0 + w) = 0$, para todo $a \in X$ con $\|a\| \le 1$ y $\langle a, x_0\rangle = 0$, entonces $\xi = 0$ (lo que se obtiene aplicando la hipótesis con $a = 0$) y en consecuencia $\langle a, w\rangle = 0$, para todo $a \in \{x_0\}^\perp$. En particular, $\langle w, w\rangle = 0$ y así $w = 0$. Por tanto, los funcionales de soporte (correspondientes a la norma p_E) en el punto $2x_0$ separan los puntos de X y queda probado de este modo que $2x_0$ es un vértice de E. Lo mismo ocurre naturalmente con el punto $-2x_0$. ■

Corolario 3.10 *Todo espacio prehilbertiano real admite una norma equivalente con respecto a la cual cada isometría lineal (no necesariamente sobreyectiva) tiene un punto fijo de norma uno o transforma un punto de norma uno en su antípoda.*

Demostración:

El resultado es trivialmente cierto en el caso uno-dimensional. De acuerdo con esto y con el desarrollo anterior, sea X un espacio prehilbertiano real de dimensión mayor o igual que dos (finita o infinita), $x_0 \in S_X$,

$$E = \mathrm{co}(B_X \cup \{-2x_0, 2x_0\})$$

y p_E el funcional de Minkowski del conjunto E. Enseguida veremos que la norma p_E cumple lo pedido. Consideremos pues una aplicación lineal v, de X en X, tal que $p_E(v(x)) = p_E(x)$, para todo $x \in X$ (una isometría lineal para la norma p_E). Entonces v transforma cada vértice de la bola unidad de X, para la norma p_E, en un vértice de la bola unidad del subespacio $v(X)$ (para la misma norma). En particular, $v(2x_0)$ es un vértice de la bola unidad de $v(X)$ para la norma p_E. Por otra parte, de acuerdo con la proposición anterior, (X, p_E) es suave en todo punto de su correspondiente esfera unidad que sea distinto de $2x_0$ y $-2x_0$. Evidentemente lo mismo ocurre con cualquier subespacio de X. Luego si un subespacio de dimensión mayor o igual que dos de X posee vértices en su bola unidad (relativa a p_E), éstos han de ser necesariamente los puntos $2x_0$ y $-2x_0$. En consecuencia, $v(2x_0) = 2x_0$ ó $v(2x_0) = -2x_0$. ■

El tipo de construcción del ejemplo anterior no nos ofrece la misma conclusión para un espacio normado arbitrario X. Esto puede verse considerando por ejemplo $(\mathbb{R}^2, || \cdot ||_1)$. Sin embargo, todo parece indicar que debe ir bien con cualquier espacio normado suave. Enseguida confirmaremos este punto inspirándonos en la renormación anterior pero modificándola convenientemente con objeto de simplificar los cálculos. El desarrollo precedente queda pues como una motivación, interesante a nuestro juicio en sí misma, de lo que sigue.

Sea pues X un espacio normado real. Supongamos que X es suave y sea $x_0 \in S_X$. Es sencillo comprobar que la aplicación $||| \cdot ||| : X \to \mathbb{R}_0^+$ dada por

$$|||tx_0 + y||| = \tfrac{||y|| + \sqrt{4t^2 + ||y||^2}}{2} \quad (t \in \mathbb{R}, y \in Y),$$

donde Y es un complemento topológico de $\text{lin}\{x_0\}$ es una norma sobre X equivalente a la de partida.

Las secciones bidimensionales de la bola unidad de $(X, ||| \cdot |||)$ que contienen a x_0 se ilustran mediante la siguiente figura:

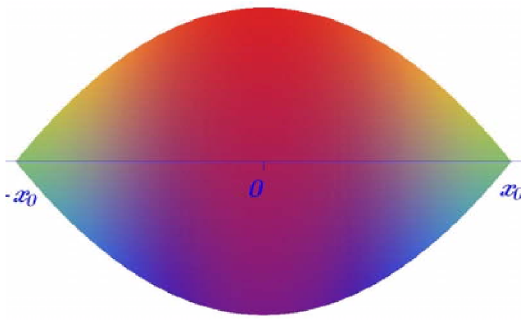


Figura 3.5

Como ya hemos indicado, el Corolario 3.10 admite la siguiente generalización:

Teorema 3.11 *Todo espacio normado real y suave puede renormarse de modo que cada isometría lineal posea un punto fijo de norma uno o transforme un punto de norma uno en su antípoda.*

Demostración:

Sean X un tal espacio, $x_0 \in S_X$ y $|||\cdot|||$ la norma anteriormente definida. Consideremos $x \in X \backslash \{-x_0, x_0\}$ tal que $|||x||| = 1$. Dados $t \in \mathbb{R}$ e $y \in Y$ con $x = tx_0 + y$, se tiene necesariamente que $y \neq 0$. Fijemos un vector $u = \xi x_0 + w$ donde $\xi \in \mathbb{R}$ y $w \in Y$. Entonces cualquiera que sea $s \in \mathbb{R}$,

$$|||x + su||| = |||(t + s\xi)x_0 + y + sw||| = \frac{||y+sw|| + \sqrt{4(t+s\xi)^2 + ||y+sw||^2}}{2}.$$

Puesto que $\|\cdot\|$ es suave en y, existe un único $y^* \in X^*$ con $\|y^*\| = 1 = y^*(\frac{y}{\|y\|})$. Además y^* es la diferencial de Gâteaux de $\|\cdot\|$ en el punto y. Esto es,

$$y^*(w) = \lim_{s \to 0} \frac{\|y + sw\| - \|y\|}{s}, \text{ para todo } w \in X.$$

Si $w \in X$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la aplicación dada por $\varphi(s) = \|y + sw\|$, es obvio que φ es derivable en cero con $\varphi'(0) = y^*(w)$. De ello se sigue claramente que la función $s \to |||x + su|||$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es derivable en cero y que su derivada en dicho punto viene dada por

$$\lim_{s \to 0} \frac{|||x + su||| - 1}{s} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{||y||}{\sqrt{4t^2 + ||y||^2}}\right) y^*(w) + \frac{2t\xi}{\sqrt{4t^2 + ||y||^2}}. \tag{3.3}$$

Puesto que u es arbitrario, de lo anterior se deduce que $|||\cdot|||$ es suave en x.

Por otra parte, la igualdad (3.3) permite encontrar funcionales de soporte en el punto x_0 relativos a la norma $|||\cdot|||$. En concreto, para cada $y^* \in X^*$ con $||y^*|| \leq 1$ y $y^*(x_0) = 0$, la aplicación $x^* : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$x^*(\xi x_0 + w) = \frac{y^*(w)}{2} + \xi, \quad (\xi \in \mathbb{R}, w \in Y) \tag{3.4}$$

es un tal funcional. En efecto, $x^*(x_0) = \frac{y^*(0)}{2} + 1 = 1$ y además dados un número real ξ y un vector $w \in Y$

$$|x^*(\xi x_0 + w)| = \left|\frac{y^*(w)}{2} + \xi\right| \leq \left|\frac{y^*(w)}{2}\right| + |\xi| \leq \frac{||w||}{2} + \frac{\sqrt{4\xi^2+||w||^2}}{2} = |||\xi x_0 + w|||$$

con lo que $|||x^*||| = 1$.

Para comprobar que x_0 es un vértice de la bola unidad de $(X, ||| \cdot |||)$, fijemos un número real ξ y un vector $w \in Y$. Supongamos que $x^*(\xi x_0 + w) = 0$, para todo x^* como en (3.4). Entonces $\xi = 0$ (lo que se obtiene considerando el caso $y^* = 0$) y en consecuencia $y^*(w) = 0$, para todo $y^* \in X^*$ con $y^*(x_0) = 0$. Si fuese $w \neq 0$, existiría un funcional $y^* \in X^*$ tal que

$$y^*(x_0) = 0 \quad e \quad y^*(w) = d(w, \operatorname{lin} x_0) > 0,$$

pero esto es incompatible con la hipótesis anterior. Por tanto $w = 0$ y así los funcionales de soporte (correspondientes a la norma $||| \cdot |||$) en el punto x_0 separan los puntos de X. Por consiguiente, x_0 es un vértice de E y lo mismo ocurre, naturalmente, con el punto $-x_0$. Razonando como en el Corolario 3.10, concluimos que toda isometría de $(X, ||| \cdot |||)$ en sí mismo fija el punto x_0 o lo transforma en su opuesto. ■

Como consecuencia inmediata, todo espacio normado real de dimensión finita puede renormarse con la propiedad citada en el teorema precedente y queda pendiente una cuestión que constituye un interesante problema abierto. Se trata de analizar si de hecho, cualquier espacio normado real admite una renormación en el sentido indicado.

Pero aún nos parece más sugestiva la posibilidad de renormar un espacio real de modo que existan isometrías lineales que no posean puntos fijos ni antípodas aproximados en su correspondiente esfera unidad. En el caso finito dimensional, esto es posible si, y sólo si, la dimensión es par. De hecho, ya habíamos comentado que si X es un espacio normado de dimensión impar, cualquier aplicación meramente continua de S_X en S_X posee un punto fijo o transforma un punto en su opuesto. Por otra parte, si X es un espacio normado de dimensión par, entonces X es isomorfo a $\mathbb{R}^{2k}$ para conveniente $k \in \mathbb{N}$ y basta tener en cuenta que la aplicación

$$(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2k}) \mapsto (x_{k+1}, \ldots, x_{2k}, -x_1, \ldots, -x_k),$$

de $\mathbb{R}^{2k}$ en $\mathbb{R}^{2k}$, es lineal e isométrica y no posee, como ya habíamos dicho, puntos fijos ni antípodas aproximados sobre la esfera unidad de $\mathbb{R}^{2k}$.

Capítulo 4

Estructura extremal de los espacios de funciones uniformemente continuas

La distinción entre espacios de funciones continuas y espacios de funciones uniformemente continuas carece de contenido si el estudio se limita a la consideración de compactos como espacios de salida. Tal limitación impide la obtención de resultados de indudable interés desde el punto de vista geométrico e incluso en el ámbito de la topología infinito-dimensional. Para ser más claros, un ejemplo especialmente relevante es $C(B_X, X)$, el espacio de las funciones continuas y acotadas definidas en la bola unidad de un espacio normado X y con valores en X. Si X es infinito-dimensional, el espacio de salida B_X no es compacto.

Por otra parte, la consideración de espacios topológicos no compactos confiere pleno sentido a la distinción entre los espacios de funciones continuas y los espacios de funciones uniformemente continuas.

A partir de este momento, M será un espacio métrico (no necesariamente compacto) y X un espacio normado. Mediante el símbolo $U(M, X)$, denotaremos el espacio de las funciones uniformemente continuas y acotadas de

M en X con la norma uniforme:

$$\|f\| = \sup\{\|f(t)\| : t \in M\}.$$

Las diferencias geométricas entre espacios del tipo $C(M,X)$ y $U(M,X)$, anteriormente aludidas, pueden evidenciarse incluso en el caso $X = \mathbb{R}$. Para ponerlo de manifiesto, sea por ejemplo $M = \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t,e^t) : t \in \mathbb{R}\}$ con la distancia inducida por la de $\mathbb{R}^2$. El espacio $C(M,\mathbb{R})$ tiene exactamente cuatro puntos extremos mientras que $U(M,\mathbb{R})$ tiene sólo dos, la función constantemente igual a uno y su opuesta.

En este capítulo analizamos la estructura extremal de los espacios $U(M,X)$ y obtenemos aplicaciones a la teoría de retracciones en espacios de Banach de dimensión infinita.

Más adelante, a medida que avance la exposición, añadiremos algunos comentarios que, en particular, precisan las condiciones que impondremos al espacio X. El propósito es sencillamente, que tales restricciones aparezcan de forma natural.

4.1 Algunos hechos básicos sobre puntos extremos y retracciones en espacios de Banach

Sea X es un espacio normado real o complejo. Es bien conocido que si X es finito-dimensional, $B_X = \mathrm{co}(E_X)$. Sin embargo, existen espacios de Banach (de dimensión infinita) X tales que $E_X = \emptyset$, como ocurre por ejemplo si $X = c_0$ o $L_1([0,1])$.

Sea T un espacio topológico y, como siempre, $C(T,X)$ el espacio de las funciones continuas y acotadas de T en X con la norma uniforme.

Cabe calificar de ingenuo cualquier intento de describir a plena generalidad, es decir, sin más condiciones que las ya expresadas, los puntos extremos de la bola unidad de $C(T, X)$. Piénsese sin ir más lejos que tal pretensión es tan ambiciosa como intentar caracterizar los puntos extremos de cualquier espacio normado X.

En cambio, parece más sensato intentar relacionar la existencia y descripción de puntos extremos en $B_{C(T,X)}$ con la geometría de la bola unidad de X.

El primer paso consiste en detectar condiciones necesarias para que un elemento de $C(T, X)$ sea un punto extremo de su bola unidad. En este sentido, hemos aislado una propiedad elemental pero muy eficiente que verifican, al menos, los subespacios de $C(T, X)$ que nos interesan.

Para agilizar la exposición, dado un subespacio Y de $C(T, X)$, diremos que Y tiene suficientes funciones no nulas, si se verifica la siguiente condición: para cada $f \in Y$ y cada $t_0 \in T$, existe una aplicación (no necesariamente continua) $g : T \to B_X$ de modo que $g(t_0) \neq 0$ y la función determinada por $t \mapsto (1 - \|f(t)\|)g(t)$, de T en X, pertenece a Y.

A modo de ejemplo, observemos que el propio espacio $C(T, X)$ tiene suficientes funciones no nulas. Basta considerar un punto $x_0 \in S_X$ y, como g, la función constantemente igual a x_0. En este caso, una misma aplicación g es válida para toda $f \in C(T, X)$ y todo $t_0 \in T$. Tenemos de paso una idea de lo escasamente restrictiva que es la propiedad anterior. Si $T = M$, lo mismo ocurre con $U(M, X)$.

Proposición 4.1 *Sea Y un subespacio de $C(T, X)$ con suficientes funciones no nulas y $e \in E_Y$. Entonces $\|e(t)\| = 1$ para todo $t \in T$.*

Demostración:

Dado $t_0 \in T$ existe, por hipótesis, una aplicación $g : T \to B_X$ con $g(t_0) \neq 0$ y tal que la función $t \mapsto (1 - \|e(t)\|)g(t)$, de T en X, pertenece a Y.

Es claro entonces que las funciones $f_1, f_2 : T \to X$ dadas, para cada $t \in T$, por las igualdades

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e(t) + (1 - \|e(t)\|)g(t) \\ f_2(t) &= e(t) - (1 - \|e(t)\|)g(t) \end{aligned}$$

son elementos de Y. Además, $\|f_1(t)\| \leq \|e(t)\| + 1 - \|e(t)\| = 1$, para todo $t \in T$. Luego $\|f_1\| \leq 1$ y análogamente $\|f_2\| \leq 1$. Puesto que $e = \frac{f_1+f_2}{2}$, se tiene que $f_1 = f_2 = e$ y así $(1 - \|e(t)\|)g(t) = 0$, para cada $t \in T$. Así pues, $(1 - \|e(t_0)\|)g(t_0) = 0$ y como $g(t_0) \neq 0$ se tiene que $\|e(t_0)\| = 1$. Esto concluye la demostración en virtud de la arbitrariedad de t_0. ∎

En particular, de acuerdo con el comentario que precede a la proposición anterior, cualquier punto extremo de la bola unidad de $C(T, X)$ o de $U(M, X)$ toma sus valores en la esfera unidad de X.

El recíproco de la proposición anterior no es cierto en general. De hecho, si Y contiene a las funciones constantes (lo que ocurre por ejemplo para $Y = C(T, X)$ o, en el caso $T = M$, para $Y = U(M, X)$) y existe un punto $x_0 \in S_X \backslash E_X$, la función $e : T \to X$ dada por

$$e(t) = x_0, \text{ para todo } t \in T,$$

satisface la tesis de la proposición y evidentemente $e \notin E_Y$.

Sin embargo, si el espacio X es estrictamente convexo, los puntos extremos de Y quedan perfectamente descritos como vemos a continuación.

Corolario 4.2 *Sea Y un subespacio de $C(T, X)$ con suficientes funciones no nulas y $e \in Y$. Consideremos las siguientes condiciones:*

i) $e(t) \in E_X$, para todo $t \in T$.

ii) $e \in E_Y$.

iii) $\|e(t)\| = 1$, *para todo* $t \in T$.

Entonces i) $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii) y si* X *es estrictamente convexo las tres condiciones son equivalentes.*

Si L es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff, un subespacio importante de $C(L, X)$ es $C_0(L, X)$, el espacio de las funciones continuas $f : L \to X$ que se anulan en el infinito:

$$\text{Dado } \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ existe un compacto } K \subset L \text{ tal que } \|f(t)\| < \varepsilon, \forall t \in L \backslash K.$$

La acotación de los elementos de $C_0(L, X)$ es automática. En el caso de que X sea el cuerpo de escalares, escribimos solo $C_0(L)$.

A continuación mostraremos que $C_0(L, X)$ tiene suficientes funciones no nulas. En efecto, sea $f \in C_0(L, X)$ y observemos que si φ es una función continua y acotada, definida en L y escalarmente valuada, entonces φf pertenece a $C_0(L, X)$. Como consecuencia, basta mostrar que dado $t_0 \in L$, existe $g \in B_{C_0(L,X)}$ tal que $g(t_0) \neq 0$. Para ello consideremos un entorno U de t_0 tal que $\overline{U}$ es compacto y sea $\eta : L \to [0, 1]$ una función continua con $\eta(t_0) = 1$ y $\eta(t) = 0$, para todo $t \in L \backslash U$ (en particular $\eta(t) = 0$, para todo $t \in L \backslash \overline{U}$). Dado un punto $x_0 \in S_X$, la aplicación $g : L \to B_X$ dada por $g(t) = \eta(t)x_0$, cumple lo deseado.

De este hecho se deduce inmediatamente el siguiente resultado perfectamente conocido.

Corolario 4.3 *Supongamos que* $E_{C_0(L,X)} \neq \emptyset$. *Entonces* L *es compacto.*

Demostración:

Supongamos que existe $e \in E_{C_0(L,X)}$. Como $C_0(L,X)$ tiene suficientes funciones no nulas, la Proposición 4.1 garantiza que $\|e(t)\| = 1$, para todo $t \in L$. Por otra parte, existe $K \subset L$ compacto tal que

$$t \in L \backslash K \Rightarrow \|e(t)\| < 1.$$

Puesto que la tesis de la implicación anterior no se cumple en ningún punto t, necesariamente $L = K$ y L es compacto. ■

En consecuencia, si L es localmente compacto pero no compacto entonces $E_{C_0(L,X)} = \emptyset$. Y el que hemos mencionado es el caso realmente representativo para los espacios $C_0(L,X)$ pues si L es compacto, estaríamos hablando de $C(L,X)$.

En particular los espacios $C_0(\mathbb{N},X)$ y por tanto c_0 carecen de puntos extremos en su bola unidad.

Es natural plantearse si la ausencia de puntos extremos en la bola unidad de un espacio X la heredan los espacios $C(T,X)$. En el caso concreto del espacio $C(K,c_0)$, donde K es un espacio topológico compacto de Hausdorff, la respuesta es afirmativa como se deduce del siguiente resultado.

Proposición 4.4 *Los espacios $C(K,c_0)$ y $C_0(K \times \mathbb{N})$ son isométricamente isomorfos.*

Demostración:

Dado $f \in C(K,c_0)$, sea $g_f : K \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $g_f(t,n) = f(t)(n)$, para todo $(t,n) \in K \times \mathbb{N}$. Consideremos un número real positivo ε. Dado un punto $t \in K$, existe un entorno abierto U_t del punto t de modo que

$$s \in U_t \Rightarrow \|f(s) - f(t)\| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\{t_1, \ldots, t_p\} \subset K$ con $\bigcup_{j=1}^{p} U_{t_j} = K$. Evidentemente existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Rightarrow |f(t_j)(n)| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Pongamos $Q = K \times \{1, \ldots, m\}$ y fijemos un par $(s, n) \in (K \times \mathbb{N}) \backslash Q$. Entonces $n > m$ y existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $s \in U_{t_j}$.

Luego $\|f(s) - f(t_j)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, es decir,

$$\max\{|f(s)(n) - f(t_j)(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Dado que $n > m$,

$$|g_f(s, n)| = |f(s)(n)| \leq |f(s)(n) - f(t_j)(n)| + |f(t_j)(n)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Se prueba así que $g_f \in C_0(K \times \mathbb{N})$.

La aplicación $f \mapsto g_f$, de $C(K, c_0)$ en $C_0(K \times \mathbb{N})$, es claramente lineal. Para ver que la aplicación anterior es sobreyectiva consideremos h perteneciente a $C_0(K \times \mathbb{N})$. Dado $t \in K$, sea $f(t) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$f(t)(n) = h(t, n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que $f \in C(K, c_0)$. Si $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe un compacto $Q \subset K \times \mathbb{N}$ de tal forma que si $(t, n) \in (K \times \mathbb{N}) \backslash Q$, entonces $|h(t, n)| < \varepsilon$. Recurriendo a las proyecciones de $K \times \mathbb{N}$ sobre K y $\mathbb{N}$, vemos inmediatamente que existe un compacto $K_1 \subset K$ y un natural m tales que $Q \subset K_1 \times \{1, \ldots, m\}$. Así pues, si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq m + 1$, es claro que $(t, n) \notin Q$ y por tanto

$$|f(t)(n)| = |h(t, n)| < \varepsilon,$$

lo que prueba que $f(t) \in c_0$.

Comprobemos ahora que f, como aplicación de K en c_0, es continua. Para ello, fijemos un punto $t_0 \in K$. Sea nuevamente $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y, como antes, consideremos un compacto $K_1 \subset K$ y un natural m, de modo que, para $Q = K_1 \times \{1, \ldots, m\}$, se tenga

$$|h(t,n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ cualquiera que sea } (t,n) \in (K \times \mathbb{N}) \setminus Q.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, existe un entorno U_n del punto t_0 tal que

$$t \in U_n \Rightarrow |h(t,n) - h(t_0,n)| < \varepsilon.$$

Consideremos $U = U_1 \cap \cdots \cap U_m$. Dado $t \in U$ se tiene que

$$|h(t,n) - h(t_0,n)| < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \{1, \ldots, m\}.$$

Además, dado un natural $n > m$, se tiene claramente que

$$(t,n), (t_0,n) \in (K \times \mathbb{N}) \setminus Q$$

y, en consecuencia

$$|h(t,n) - h(t_0,n)| \leq |h(t,n)| + |h(t_0,n)| < \varepsilon.$$

Acabamos de probar que, dado $t \in U$, $|h(t,n) - h(t_0,n)| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$|(f(t) - f(t_0))(n)| < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

y así $\|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$.

Es obvio, por otra parte, que $g_f = h$.

Finalmente, la aplicación $f \mapsto g_f$, anteriormente definida, es una isometría. Para ponerlo de manifiesto, sean $f \in C(K, c_0)$ y $t \in K$ entonces

$$|f(t)(n)| = |g_f(t,n)| \leq \|g_f\|, \text{ para cada número natural } n,$$

con lo que $\|f(t)\| \leq \|g_f\|$ y en virtud de la arbitrariedad de t, $\|f\| \leq \|g_f\|$. Por otra parte,

$$|g_f(t,n)| = |f(t)(n)| \leq \|f(t)\| \leq \|f\|\,, \text{ para todo } (t,n) \in K \times \mathbb{N}$$

y así $\|g_f\| \leq \|f\|$. En consecuencia, $\|f\| = \|g_f\|$, para todo $f \in C(K, c_0)$. ■

Como $K \times \mathbb{N}$ es localmente compacto no compacto, los dos resultados anteriores ponen de manifiesto que $C(K, c_0)$ no tiene puntos extremos.

A pesar de ello, no parece prudente conjeturar que la condición $E_X = \emptyset$ implique, con carácter general, $E_{C(T,X)} = \emptyset$. En este sentido, cabe mencionar un ejemplo debido a Blumenthal Lindenstrauss y Phelps, en el que se pone de manifiesto la existencia de una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^4$ y una aplicación f, de $[0,1]$ en X, donde $X = (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$ de modo que f es un punto extremo de la bola unidad de $C([0,1], X)$ y sin embargo $f(t) \notin E_X$, para todo $t \in [0,1]$ (véase [5]). Así pues, aunque $E_X \neq \emptyset$ por ser X finito-dimensional, no se hace uso de los puntos extremos de la bola unidad de X para obtener la aplicación f.

Puesto que, cualquiera que sea el espacio métrico M, $U(M, X)$ tiene suficientes funciones no nulas, para todo espacio normado X, el Corolario 4.2 nos proporciona una útil descripción de los puntos extremos de la bola unidad de $U(M, X)$ en caso de ser X un espacio estrictamente convexo. Tenemos así una primera justificación para exigir en lo que sigue la estricta convexidad de X. Pero, hemos de señalar además que esta hipótesis, o más exactamente, la convexidad uniforme de X, desempeñará un importante papel independiente de lo que es la mera descripción de los puntos extremos.

El estudio de la estructura extremal de los espacios de funciones continuas que toman valores en un espacio normado infinito-dimensional X, está íntimamente relacionado con la posibilidad de expresar la aplicación identidad en la bola unidad de X (que denotaremos por I_X) como una combinación convexa de retracciones continuas de la bola unidad en la esfera unidad de X. Más concretamente:

Proposición 4.5 *Sea X un espacio normado estrictamente convexo e $Y = C(B_X, X)$ (resp. $U(B_X, X)$). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $B_Y = \mathrm{co}(E_Y)$.

ii) I_X *es combinación convexa de retracciones continuas (resp. uniformemente continuas) de la bola unidad sobre la esfera unidad de X.*

Además, en caso afirmativo, X es infinito-dimensional.

Demostración:

Supongamos que $B_Y = \mathrm{co}(E_Y)$. En particular, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en $]0, 1]$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ y $r_1, r_2, \ldots, r_n \in E_Y$ tales que

$$I_X = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \cdots + \lambda_n r_n.$$

Teniendo en cuenta el Corolario 4.2, $\|r_i(x)\| = 1$, para cada $x \in B_X$ y cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. La igualdad $x = \lambda_1 r_1(x) + \lambda_2 r_2(x) + \cdots + \lambda_n r_n(x)$, válida para todo $x \in B_X$ y en particular para todo $x \in S_X$, permite deducir, haciendo uso de la estricta convexidad de X, que $x = r_1(x) = r_2(x) = \cdots = r_n(x)$, para todo $x \in S_X$. Así pues, cualquiera que sea $i \in \{1, 2, ..., n\}$, la aplicación r_i es una retracción continua (resp. uniformemente continua) de B_X sobre S_X.

Recíprocamente, supongamos que existe un número natural n y, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, un escalar $\lambda_i \in]0, 1]$ y una retracción continua (resp. uniformemente continua) $r_i : B_X \to S_X$, tales que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1, \quad I_X = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \cdots + \lambda_n r_n.$$

Dada una función $f \in B_Y$ se tiene, evidentemente, que

$$f(x) = \lambda_1 r_1(f(x)) + \lambda_2 r_2(f(x)) + \cdots + \lambda_n r_n(f(x)), \text{ para todo } x \in B_X.$$

Si para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ponemos $e_i = r_i \circ f$, es claro, en vista del Corolario 4.2, que $e_i \in E_Y$. Como además, $f = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$, concluimos que $f \in \mathrm{co}(E_Y)$. ■

En el caso $Y = C(B_X, X)$ y con respecto a la última parte del enunciado anterior, podemos recordar aquí algo que ya se había comentado en el Capítulo I. Concretamente, si X es de dimensión finita, la condición $i)$ no se cumple ya que en caso contrario se tendría $\dim B_X < \dim X$ (es bien sabido que la dimensión topológica de un subconjunto con interior no vacío de un espacio normado finito-dimensional X coincide con la dimensión algebraica de X). Alternativamente, es posible justificar la última afirmación de la proposición anterior, recurriendo a otro hecho conocido. La esfera unidad de un espacio normado X de dimensión finita no es un retracto de su bola unidad. Este último comentario explica la necesidad de la infinitud de la dimensión de X, también en el caso $Y = U(B_X, X)$.

En el resultado precedente, se puede sustituir la condición $B_Y = \mathrm{co}(E_Y)$ por otro tipo de representación de los elementos de la bola unidad de Y en términos de sus puntos extremos. Como ejemplo interesante podemos considerar la propiedad de representación en series convexas, cuya definición es fácil de adivinar. Con argumentos similares, obtendríamos que dicha propiedad equivale a la posibilidad de expresar la aplicación I_X en la forma

$$I_X = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n r_n,$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in [0, 1]$ y r_n es una retracción continua (resp. uniformemente continua) de B_X sobre S_X. La interpretación de la suma anterior puede hacerse en la topología natural de Y, es decir, en la topología de la convergencia uniforme en B_X o incluso cabe una interpretación puntual, en cuyo caso, habría que entender de la misma manera la propiedad de representación en series convexas. Otra posibilidad es sustituir la afirmación $B_Y = \mathrm{co}(E_Y)$ por la condición $B_Y = \lambda_1 E_Y + \cdots + \lambda_n E_Y$, donde $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in]0,1]$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ (el natural n y los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ se consideran fijos). En este caso se tendría $I_X = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \cdots + \lambda_n r_n$ donde, como antes, cada r_i es una retracción continua (resp. uniformemente continua) de B_X sobre S_X.

En la última sección de este capítulo estudiaremos la interacción entre la estructura extremal de $U(M,X)$ y las representaciones de la identidad en B_X como combinación convexa de retracciones uniformemente continuas. La convexidad uniforme de X desempeñará un papel relevante.

4.2 Construcción de funciones uniformemente continuas

A continuación pondremos a punto algunos hechos más o menos elementales que facilitarán el uso de las funciones uniformemente continuas.

Comenzamos señalando dos propiedades fundamentales de tales funciones que complementan la estabilidad de $U(M,X)$ para las operaciones propias de un espacio vectorial.

Si $\eta : M \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua tal que $|\eta(t)| > \rho$ para algún $\rho \in \mathbb{R}^+$ y todo $t \in M$, entonces $\frac{1}{\eta} \in U(M,\mathbb{R})$. Por otra parte, si $\eta \in U(M,\mathbb{R})$ y $\phi \in U(M,X)$ se tiene que $\eta\phi \in U(M,X)$.

Las mismas afirmaciones son válidas sustituyendo la continuidad uniforme por la condición de Lipschitz (la acotación habría que mantenerla en los mismos términos).

Si el espacio métrico admite una descomposición conveniente, la continuidad uniforme para funciones que partan de él, puede derivarse directamente del comportamiento de sus correspondientes restricciones:

Proposición 4.6 *Sean M y N espacios métricos, A_1 y A_2 subconjuntos (no necesariamente disjuntos) de M con $M = A_1 \cup A_2$ y supongamos que dados $\delta \in \mathbb{R}^+$, $a \in A_1$ y $b \in A_2$ con $d(a,b) < \delta$ existe $c \in A_1 \cap A_2$ tal que $d(a,c) < \delta$ y $d(c,b) < \delta$. Consideremos una aplicación $\varphi : M \to N$ con $\varphi|_{A_1}$ y $\varphi|_{A_2}$ uniformemente continuas, entonces φ es uniformemente continua.*

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad uniforme de $\varphi|_{A_1}$ y $\varphi|_{A_2}$ garantiza la existencia de un número real positivo δ tal que, dados $t, t' \in A_1$ ó $t, t' \in A_2$,

$$d(t,t') < \delta \Rightarrow d(\varphi(t), \varphi(t')) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos pues $t, t' \in M$ con $d(t,t') < \delta$. En vista de lo anterior, podemos suponer que $t \in A_1$ y $t' \in A_2$. Por hipótesis existe $c \in A_1 \cap A_2$ con $d(t,c) < \delta$ y $d(c,t') < \delta$. Es claro entonces que $d(\varphi(t), \varphi(c)) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(\varphi(c), \varphi(t')) < \frac{\varepsilon}{2}$ y, en consecuencia,

$$d(\varphi(t), \varphi(t')) \leq d(\varphi(t), \varphi(c)) + d(\varphi(c), \varphi(t')) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Merece la pena comentar que retocando convenientemente la hipótesis sobre M, el resultado precedente admite una versión para funciones lipschitzianas:

Sean M y N espacios métricos, $M = A_1 \cup A_2$ con A_1 y A_2 subconjuntos de M y supongamos que existen $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que, para cualesquiera $a \in A_1$ y $b \in A_2$, existe $c \in A_1 \cap A_2$ con $d(a,c) \leq \rho_1 \, d(a,b)$ y $d(c,b) \leq \rho_2 \, d(a,b)$. Sea $\varphi : M \to N$ una aplicación cuyas restricciones a los conjuntos A_1 y A_2 sean lipschitzianas. Entonces φ también lo es. En efecto, podemos suponer que $\rho_1 \geq \frac{1}{2}$ y que $\rho_2 \geq \frac{1}{2}$. De este modo, si L_1 y L_2 son constantes de Lipschitz para $\varphi|_{A_1}$ y $\varphi|_{A_2}$ respectivamente, entonces $L = (\rho_1 + \rho_2) \max\{L_1, L_2\}$ es una constante de Lipschitz para φ. De hecho, si $t \in A_1$ y $t' \in A_2$ (los casos

$t, t' \in A_1$ y $t, t' \in A_2$ son inmediatos), existe $c \in A_1 \cap A_2$ con $d(t,c) \leq \rho_1\, d(t,t')$ y $d(c,t') \leq \rho_2\, d(t,t')$. Por tanto,

$$\begin{aligned} d(\varphi(t),\varphi(t')) &\leq d(\varphi(t),\varphi(c)) + d(\varphi(c),\varphi(t')) \\ &\leq L_1\, d(t,c) + L_2\, d(c,t') \\ &\leq \max\{L_1,L_2\}\,(d(t,c)+d(c,t')) \\ &\leq \max\{L_1,L_2\}\,(\rho_1+\rho_2)\, d(t,t') = L\, d(t,t'). \end{aligned}$$

Como aplicación de las observaciones que acabamos de hacer, estudiaremos a continuación las propiedades de una cierta función φ que desempeñará un papel decisivo en la siguiente sección. De paso, damos una primera idea del modo en el que intervendrán las funciones sin puntos fijos ni antípodas.

Para ello, sea X un espacio normado con $\dim X \geq 2$ y B un subconjunto de B_X. En el conjunto $M = [0,2] \times B$ consideraremos la distancia que sigue:

$$d((t,x),(s,y)) = \max\{|t-s|\,, \|x-y\|)\},\ \text{ para todo } (t,x),(s,y) \in M.$$

Evidentemente, podemos descomponer M como unión de los conjuntos $A_1 = [0,1] \times B$ y $A_2 = [1,2] \times B$. Veremos enseguida que M cumple tanto la condición de la Proposición 4.6 como la versión correspondiente a las funciones lipschitzianas.

Sea pues $\delta \in \mathbb{R}^+$, $(t,x) \in A_1$ y $(s,y) \in A_2$ con $d((t,x),(s,y)) < \delta$. Consideremos por ejemplo $(1,x) \in A_1 \cap A_2$. Teniendo en cuenta que $t \leq 1 \leq s$,

$$d((t,x),(1,x)) = |t-1| \leq |t-s| \leq d((t,x),(s,y)) < \delta$$

y

$$\begin{aligned} d((1,x),(s,y)) &= \max\{|1-s|\,, \|x-y\|\} \leq \max\{|t-s|\,, \|x-y\|\} \\ &= d((t,x),(s,y)) < \delta. \end{aligned}$$

Utilizando los mismos argumentos, se prueba lo correspondiente a las funciones lipschitzianas con $\rho_1 = \rho_2 = 1$.

Consideraremos ahora un número real ρ, con $0 < \rho < 1$, y un conjunto no vacío B tal que $\rho \leq \|x\| \leq 1$, para todo $x \in B$. Sea además S un subconjunto de la esfera unidad de X que contenga al conjunto $\left\{\frac{x}{\|x\|} : x \in B\right\}$ y supongamos que existe una aplicación uniformemente continua $v : S \to S_X$ tal que

$$\rho_0 := \inf\{||v(x) \pm x|| : x \in S\} > 0.$$

La aplicación $\varphi : [0,2] \times B \to B_X$ dada por

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} (1-t)\frac{x}{||x||} + tv(\frac{x}{||x||}) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t)v(\frac{x}{||x||}) - (t-1)\frac{x}{||x||} & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \tag{4.1}$$

es uniformemente continua puesto que lo son sus restricciones a los conjuntos $A_1 = [0,1] \times B$ y $A_2 = [1,2] \times B$ (ténganse en cuenta los comentarios que aparecen al principio de esta sección y por supuesto la proposición anterior).

Si v es de hecho Lipschitziana se tiene del mismo modo que φ también lo es.

Añadimos ahora una sencilla observación sobre la estabilidad para cocientes de las funciones uniformemente continuas:

Proposición 4.7 *Sean M un espacio métrico, $f, g : M \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas (resp. $f, g : M \to \mathbb{R}$ lipschitzianas) y supongamos que existen $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $|g(x)| \geq \rho_1$ y $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \rho_2$, para todo $x \in M$. Entonces la aplicación $x \to \frac{f(x)}{g(x)}$, de M en $\mathbb{R}$, es uniformemente continua (resp. lipschitziana).*

Demostración:

Teniendo en cuenta la continuidad uniforme de f y de g, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal modo que si $x, y \in M$ y $d(x,y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \rho_1 \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - g(y)| < \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\varepsilon}{2}$. Así pues,

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(y)}\right| &= \left|\frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{g(x)g(y)}\right| = \left|\frac{f(x)[g(y)-g(x)] + g(x)[f(x)-f(y)]}{g(x)g(y)}\right| \\ &\leq \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \frac{1}{|g(y)|} |g(y) - g(x)| + \frac{1}{|g(y)|} |f(x) - f(y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

y, en consecuencia, $\frac{f}{g}$ es uniformemente continua.

Si f y g son lipschitzianas y L_f, L_g son constantes de Lipzschitz para tales funciones, razonando como antes,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(y)}\right| \leq (\frac{\rho_2}{\rho_1} L_g + \frac{1}{\rho_1} L_f)\, d(x,y), \text{ para cualesquiera } x, y \in X$$

y así $\frac{f}{g}$ es lipschitziana. ■

El resultado precedente garantiza en particular que si X es un espacio normado y A, B son subconjuntos no vacíos de X tales que $d(A,B) > 0$, la aplicación $\lambda : X \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\lambda(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}, \text{ para todo } x \in X$$

es lipschitziana. Nótese que, si $x \in X$,

$$d(x,A) + d(x,B) \geq d(A,B) > 0, \ \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} \leq 1$$

y, ni que decir tiene, que la aplicación $x \mapsto d(x,A)$ es lipschitziana para cualquier conjunto no vacío $A \subset X$ ($|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$, para cualesquiera $x, y \in X$).

Si ahora $f : M \to X$ es uniformemente continua y $A_1 = f^{-1}(A) \neq \emptyset$, la aplicación $\theta = \lambda \circ f$ posee la siguiente propiedad: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in M, d(t, A_1) < \delta \Rightarrow |\theta(t)| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Se trata de una condición que, adaptada de forma natural a la situación vectorial que nos ocupa, resulta útil para definir funciones uniformemente continuas.

Concretamente, supongamos que $M = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$ y sea $\omega : A_2 \to X$ una función uniformemente continua que verifique lo siguiente:

i) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|w(t)\| < \varepsilon$, para todo $t \in A_2$ con $d(t, A_1) < \delta$.

ii) $w(t) = 0$, para todo $t \in A_1 \cap A_2$.

Bajo tales circunstancias, el resultado que exponemos a continuación es de comprobación inmediata.

Proposición 4.8 *Dada una función $f : M \to X$ uniformemente continua, la aplicación g, de M en X, definida por*

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & si \quad t \in A_1 \\ f(t) + \omega(t) & si \quad t \in A_2 \end{cases}$$

también lo es.

4.3 Una versión vectorial del Teorema de Russo - Dye

Uno de los trabajos más importantes en relación con la estructura extremal de la bola unidad de los espacios de funciones continuas con valores en un espacio normado X y, desde luego, el que guarda una relación más directa con la presente sección, es debido a Morris y Phelps [42, Theorem 4.4]. En esta referencia, se demuestra en particular, que si K es un espacio compacto de Hausdorff y X es estrictamente convexo con $\dim X \geq 2$, la bola unidad de $C(K, X)$ es la envolvente convexo-cerrada de sus puntos extremos. Nuestro objetivo consiste en extender este resultado a los espacios de funciones uniformemente continuas y acotadas definidas en un espacio métrico M no necesariamente compacto y con valores en un espacio normado X. En esta situación requeriremos la convexidad uniforme de X en lugar de su convexidad estricta. No obstante, probaremos un hecho más fuerte. Concretamente, que la bola unidad abierta del espacio $Y = U(M, X)$ está contenida en la envolvente convexa de E_Y. Es decir, cada elemento de Y de norma estrictamente menor que uno, será representado como combinación convexa finita de puntos extremos.

Previamente, probaremos que las funciones de norma menor o igual que uno que omiten un entorno del origen, se pueden expresar como media de un número finito de puntos extremos. En este primer paso, desempeñan un papel decisivo las aplicaciones sin puntos fijos ni antípodas tratadas en el capítulo anterior.

A continuación probaremos dos resultados técnicos.

Lema 4.9 *Sea X un espacio normado, $x_0, v \in S_X$ y*

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\min\{||v - x_0||, ||v + x_0||\}.$$

Entonces, dado $b \in X$, se verifica una de las dos afirmaciones siguientes:

i) $||v - b|| \geq \alpha$ *y* $||v + b|| \geq \alpha$

ii) $||b - x_0|| \geq \alpha$ *y* $||b + x_0|| \geq \alpha$.

Demostración:

Suponiendo la negación de que la afirmación sea cierta, se tendrían cuatro alternativas:

a) $||v - b|| < \alpha$ y $||b - x_0|| < \alpha$

b) $||v - b|| < \alpha$ y $||b + x_0|| < \alpha$

c) $||v + b|| < \alpha$ y $||b - x_0|| < \alpha$

d) $||v + b|| < \alpha$ y $||b + x_0|| < \alpha$

y todas ellas nos llevan a una contradicción:

Si se verifica a), entonces $||v - x_0|| \leq ||v - b|| + ||b - x_0|| < 2\alpha \leq ||v - x_0||$.

Si se verifica b), entonces $||v + x_0|| \leq ||v - b|| + ||b + x_0|| < 2\alpha \leq ||v + x_0||$.

Si se verifica c), entonces $||v+x_0|| \leq ||v+b||+||-b+x_0|| < 2\alpha \leq ||v+x_0||$.

Si se verifica d), entonces $||v-x_0|| \leq ||v+b||+||-b-x_0|| < 2\alpha \leq ||v-x_0||$.

■

Lema 4.10 *Sea X_0 un espacio normado real de dimensión dos, $x_0, v \in S_X$ tales que $v \neq -x_0$, $a \in [x_0, v[$ y $f \in X_0^*$, con $||f|| = 1$, $\ker f$ $=\mathrm{lin}\,\{a\}$ y $f(v) \geq 0$. Entonces*

$$f(v) - f(x_0) \geq \tfrac{1}{4} \min\{||v - x_0||, ||v + x_0||\}.$$

Demostración:

Sea $t \in [0, 1[$ tal que $a = (1-t)x_0 + tv$, $b = \frac{a}{||a||}$ y consideremos el número real $\alpha = \frac{1}{2} \min\{||v - x_0||, ||v + x_0||\}$. Obviamente, $(1-t)f(x_0) = -tf(v)$ y, en consecuencia $f(x_0) \leq 0$. Supongamos en primer lugar que se verifica la afirmación i) del lema precedente: $||v - b|| \geq \alpha$ y $||v + b|| \geq \alpha$. Entonces, de acuerdo con la Proposición 2.3 se tiene,

$$f(v)-f(x_0) \geq f(v) = d(v, \ker f) = d(v, \mathrm{lin}\,\{b\}) \geq \tfrac{1}{2} \min\{||v-b||, ||v+b||\} \geq \tfrac{\alpha}{2},$$

donde por d representamos la distancia de v al subespacio $\ker f$.

Finalmente, si se verifica la afirmación ii) del lema anterior: $||b - x_0|| \geq \alpha$ y $||b + x_0|| \geq \alpha$, tenemos de manera similar,

$$\begin{aligned} f(v) - f(x_0) &\geq -f(x_0) = d(x_0, \ker f) = d(x_0, \mathrm{lin}\{b\}) \\ &\geq \tfrac{1}{2} \min\{||x_0 - b||, ||x_0 + b||\} \geq \tfrac{\alpha}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Consideremos nuevamente un espacio normado real X con $\dim X \geq 2$ y sea $v : S_X \to S_X$ una aplicación tal que

$$\rho_0 := \inf\{||v(x) \pm x|| : x \in S_X\} > 0.$$

Más adelante se requerirán condiciones adicionales sobre v pero, de momento, no es necesaria ni siquiera su continuidad. Además, para los lemas que siguen, podemos definir la función φ en un conjunto más amplio que el que apareció anteriormente. Concretamente, para cada $(t,x) \in [0,2] \times (B_X \backslash \{0\})$ sea

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} (1-t)\frac{x}{||x||} + tv(\frac{x}{||x||}) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t)v(\frac{x}{||x||}) - (t-1)\frac{x}{||x||} & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2\,. \end{cases}$$

Puesto que φ omite el origen, podemos considerar $\Psi : [0,2] \times (B_X \backslash \{0\}) \to S_X$ la aplicación dada por

$$\Psi(t,x) = \frac{\varphi(t,x)}{||\varphi(t,x)||}, \text{ para todo } (t,x) \in [0,2] \times (B_X \backslash \{0\}).$$

Bajo las condiciones que acabamos de citar se verifica el siguiente resultado.

Lema 4.11 *Dado un número real ε, con $0 < \varepsilon \leq 2$, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$s,t \in [0,2],\ |s-t| \geq \varepsilon \Rightarrow ||\Psi(s,x) - \Psi(t,x)|| \geq \delta, \text{ para cada } x \in B_X \backslash \{0\}.$$

Demostración:

Sea $\delta = \frac{\varepsilon \rho_0}{8}$ y fijemos un punto $x \in B_X \backslash \{0\}$. Consideremos entonces el subespacio $X_0 = \text{lin}\,\{x, v(\frac{x}{||x||})\}$ y sean $s,t \in [0,2]$, con $|s-t| \geq \varepsilon$. Supongamos en primer lugar que $s,t \in [0,1]$. Es claro que uno de ellos, al menos, es distinto de 1. Sin perder generalidad supondremos $t \neq 1$, en cuyo caso, $\varphi(t,x) \in [\frac{x}{||x||}, v(\frac{x}{||x||})[$. Sea $f \in X_0^*$ con $||f|| = 1$, $\ker f = \text{lin}\,\{\varphi(t,x)\}$ y $f(v(\frac{x}{||x||})) \geq 0$. De acuerdo con el lema anterior,

$$f(v(\tfrac{x}{||x||})) - f(\tfrac{x}{||x||}) \geq \tfrac{1}{4} \min\{||v(\tfrac{x}{||x||}) - \tfrac{x}{||x||}||, ||v(\tfrac{x}{||x||}) + \tfrac{x}{||x||}||\} \geq \tfrac{\rho_0}{4}\,.$$

Por tanto,

$$||\Psi(s,x) - \Psi(t,x)|| \;\; \geq \;\; d(\Psi(s,x), \ker f) = |f(\Psi(s,x))| = |\tfrac{f(\varphi(s,x))}{||\varphi(s,x)||}|$$

$$\begin{aligned}
&\geq |f(\varphi(s,x))| = |f(\varphi(s,x)) - f(\varphi(t,x))| \\
&= |(s-t)(f(v(\tfrac{x}{||x||})) - f(\tfrac{x}{||x||}))| \geq \varepsilon\tfrac{\rho_0}{4} > \delta.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $s,t \in [1,2]$ y, sin pérdida de generalidad que $t \neq 1$. Es claro entonces que $\varphi(t,x) \in]v(\frac{x}{||x||}), -\frac{x}{||x||}]$. Considerando f como en el caso anterior, el lema precedente garantiza que $f(v(\frac{x}{||x||})) + f(\frac{x}{||x||}) \geq \frac{\rho_0}{4}$. De este modo,

$$\begin{aligned}
||\Psi(s,x) - \Psi(t,x)|| &\geq |f(\varphi(s,x))| = |f(\varphi(s,x)) - f(\varphi(t,x))| \\
&= |(t-s)(f(v(\tfrac{x}{||x||})) + f(\tfrac{x}{||x||}))| > \delta.
\end{aligned}$$

Supongamos finalmente que $t \in [0,1]$ y $s \in [1,2]$. Entonces $1-t \geq \frac{\varepsilon}{2}$ ó $s-1 \geq \frac{\varepsilon}{2}$ (si $1-t < \frac{\varepsilon}{2}$ y $s-1 < \frac{\varepsilon}{2}$, se tendría $|s-t| = s-t = s-1+1-t < \varepsilon$ en contra de lo supuesto). Nos centraremos en el caso $1-t \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Si $t \geq \frac{1}{2}$ sea f como antes y observemos que $(1-t)f(\frac{x}{||x||}) + tf(v(\frac{x}{||x||})) = 0$. Luego

$$f(v(\tfrac{x}{||x||})) = -\tfrac{1-t}{t} f(\tfrac{x}{||x||}) \leq -f(\tfrac{x}{||x||})$$

(pues $\frac{1-t}{t} \leq 1$ y $-f(\frac{x}{||x||}) \geq 0$). En consecuencia $f(v(\frac{x}{||x||})) + f(\frac{x}{||x||}) \leq 0$ y, de acuerdo con el lema anterior,

$$\begin{aligned}
||\Psi(s,x) - \Psi(t,x)|| &\geq |f(\varphi(s,x)) - f(\varphi(t,x))| \\
&= |(1-t)(f(v(\tfrac{x}{||x||})) - f(\tfrac{x}{||x||})) \\
&\quad -(s-1)(f(v(\tfrac{x}{||x||})) + f(\tfrac{x}{||x||}))| \\
&= (1-t)(f(v(\tfrac{x}{||x||})) - f(\tfrac{x}{||x||})) \\
&\quad -(s-1)(f(v(\tfrac{x}{||x||})) + f(\tfrac{x}{||x||})) \\
&\geq (1-t)(f(v(\tfrac{x}{||x||})) - f(\tfrac{x}{||x||})) \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\tfrac{\rho_0}{4} = \delta.
\end{aligned}$$

Si $t < \frac{1}{2}$ sea $f \in X_0^*$ con $||f|| = 1$, $\ker f = \operatorname{lin}\{v(\frac{x}{||x||})\}$ y $f(\frac{x}{||x||}) \geq 0$. Entonces

$$f(\Psi(t,x)) = \frac{(1-t)f(\frac{x}{||x||})}{||\varphi(t,x)||} \geq 0 \quad \text{y} \quad f(\Psi(s,x)) = \frac{-(s-1)f(\frac{x}{||x||})}{||\varphi(s,x)||} \leq 0.$$

Por tanto, haciendo uso de la Proposición 2.3 tenemos

$$\begin{aligned} ||\Psi(s,x)-\Psi(t,x)|| &\geq f(\Psi(t,x)-\Psi(s,x)) = f(\Psi(t,x)) - f(\Psi(s,x)) \\ &\geq f(\Psi(t,x)) \geq (1-t)f(\tfrac{x}{||x||}) = (1-t)d(\tfrac{x}{||x||}, \ker f) \\ &\geq \tfrac{1}{2}d(\tfrac{x}{||x||}, \mathrm{lin}\,\{v(\tfrac{x}{||x||})\}) \\ &\geq \tfrac{1}{4}\min\{||v(\tfrac{x}{||x||}) - \tfrac{x}{||x||}||, ||v(\tfrac{x}{||x||}) + \tfrac{x}{||x||}||\} \\ &\geq \tfrac{\rho_0}{4} \geq \tfrac{\varepsilon\rho_0}{8} = \delta. \end{aligned}$$

De forma análoga se procede en el caso $s-1 \geq \frac{\varepsilon}{2}$. ■

Necesitaremos además el siguiente hecho intuitivo:

Lema 4.12 *Sea X un espacio normado real con* $\dim X \geq 2$, $0 < \rho_0 < 1$ *y* $x_0, v_0 \in S_X$ *tales que* $||x_0 + v_0|| \geq \rho_0$. *Entonces*

$$||(1-t)x_0 + tv_0|| \geq \tfrac{\rho_0}{4}, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Demostración:

Supongamos en primer lugar que $0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{\rho_0}{8}$. Entonces $0 \leq 2t \leq 1 - \frac{\rho_0}{4}$ y así $-1 + \frac{\rho_0}{4} \leq -2t \leq 0$, de donde $\frac{\rho_0}{4} \leq 1 - 2t \leq 1$. Con esto, se tiene que

$$||(1-t)x_0 + tv_0|| \geq 1 - t - t = 1 - 2t \geq \tfrac{\rho_0}{4}.$$

Supongamos ahora que $\frac{1}{2} - \frac{\rho_0}{8} \leq t \leq \frac{1}{2}$ y sea $z = (1-t)x_0 + tv_0$. Evidentemente $z = (1-2t)x_0 + 2t\frac{x_0+v_0}{2}$. Además, es claro que $1 - \frac{\rho_0}{4} \leq 2t \leq 1$, de donde $-1 \leq -2t \leq -1 + \frac{\rho_0}{4}$ y así $0 \leq 1 - 2t \leq \frac{\rho_0}{4}$. Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\|\tfrac{x_0+v_0}{2} - z\right\| &= \left\|\tfrac{x_0+v_0}{2} - 2t\tfrac{x_0+v_0}{2} - (1-2t)x_0\right\| = \left\|(1-2t)(\tfrac{x_0+v_0}{2} - x_0)\right\| \\ &= \left\|(1-2t)\tfrac{v_0-x_0}{2}\right\| \leq 1 - 2t \leq \tfrac{\rho_0}{4}. \end{aligned}$$

Así,

$$\|z\| = \left\|z - \tfrac{x_0+v_0}{2} + \tfrac{x_0+v_0}{2}\right\| \geq \left\|\tfrac{x_0+v_0}{2}\right\| - \left\|z - \tfrac{x_0+v_0}{2}\right\| \geq \tfrac{\rho_0}{2} - \tfrac{\rho_0}{4} = \tfrac{\rho_0}{4}.$$

Supongamos ahora $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{\rho_0}{8}$ y sea

$$z = (1-t)x_0 + tv_0 = (2-2t)\frac{x_0+v_0}{2} + (2t-1)v_0$$

como antes. Además $1 \leq 2t \leq 1 + \frac{\rho_0}{4}$, de donde $0 < 1 - \frac{\rho_0}{4} \leq 2 - 2t \leq 1$ y $0 \leq 2t - 1 \leq \frac{\rho_0}{4} < 1$. Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\tfrac{x_0+v_0}{2} - z\right\| &= \left\|\tfrac{x_0+v_0}{2} - (2-2t)\tfrac{x_0+v_0}{2} - (2t-1)v_0\right\| \\
&= \left\|(1-2+2t)\tfrac{x_0+v_0}{2} - (2t-1)v_0\right\| \\
&= \left\|(2t-1)(\tfrac{x_0+v_0}{2} - v_0)\right\| = \left\|(2t-1)\tfrac{x_0-v_0}{2}\right\| \\
&\leq 2t-1 \leq \tfrac{\rho_0}{4}.
\end{aligned}$$

De este modo,

$$\|z\| = \left\|z - \tfrac{x_0-v_0}{2} + \tfrac{x_0+v_0}{2}\right\| \geq \left\|\tfrac{x_0+v_0}{2}\right\| - \left\|z - \tfrac{x_0+v_0}{2}\right\| \geq \tfrac{\rho_0}{2} - \tfrac{\rho_0}{4} = \tfrac{\rho_0}{4}.$$

Finalmente, supongamos $\frac{1}{2} + \frac{\rho_0}{8} \leq t \leq 1$. Entonces $1 + \frac{\rho_0}{4} \leq 2t \leq 2$ y así $\frac{\rho_0}{4} \leq 2t - 1 \leq 1$. Por tanto,

$$||(1-t)x_0 + tv_0|| \geq t - (1-t) = 2t - 1 \geq \tfrac{\rho_0}{4}. \quad \blacksquare$$

En el siguiente resultado intervienen por fin dos elementos cruciales de la memoria. La desigualdad de la semicircunferencia y las aplicaciones uniformemente continuas entre esferas sin puntos fijos ni antípodas aproximados. A todo ello se superpone, como enseguida veremos, la hipótesis de convexidad uniforme.

Proposición 4.13 *Sea X un espacio normado uniformemente convexo de dimensión distinta de uno, $x_0 \in S_X$, $\rho \in]0,1[$ y*

$$B = \{x \in B_X : d(x, [0, x_0] \geq \rho)\}.$$

Entonces existen aplicaciones uniformemente continuas $\phi_1, \phi_2 : B \to S_X$ tales que

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\phi_1(x) + \phi_2(x)\right), \ \textit{para todo } x \in B.$$

Demostración:

El Teorema 3.4 garantiza la existencia de una aplicación uniformemente continua $v : S_X \backslash B(x_0, \rho) \to S_X$ sin puntos fijos ni antípodas aproximados. Definamos

$$\rho_0 = \inf \ \{\|v(x) \pm x\| : x \in S_X \backslash B(x_0, \rho)\}$$

y sea $\varphi : [0, 2] \times B \to B_X$ la función dada por

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tv(\frac{x}{\|x\|}) & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ (2-t)v(\frac{x}{\|x\|}) - (t-1)\frac{x}{\|x\|} & \text{si} \quad 1 \le t \le 2 \,. \end{cases}$$

Tal como se indicó en (4.1), la función φ es uniformemente continua. Además, teniendo en cuenta el lema anterior, φ omite un entorno del origen. Concretamente, $\|\varphi(t, x)\| \ge \frac{\rho_0}{4}$, para cada $(t, x) \in [0, 2] \times B$. Así pues, podemos concluir que la aplicación $\Psi : [0, 2] \times B \to S_X$ definida por

$$\Psi(t, x) = \tfrac{\varphi(t,x)}{\|\varphi(t,x)\|}, \ \forall (t, x) \in [0, 2] \times B$$

es uniformemente continua.

Fijemos $\varepsilon \in]0, 2]$. Por el Lema 4.11 se obtiene un número real $\delta > 0$ tal que

$$s, t \in [0, 2], \ \ |s - t| \ge \varepsilon \Rightarrow \|\Psi(s, x) - \Psi(t, x)\| \ge \delta, \ \text{para todo } x \in B.$$

Por otra parte, la convexidad uniforme de X garantiza la existencia de un número real β, con $0 < \beta < 1$, de modo que

$$z, w \in S_X : \|z - w\| \ge \delta \Rightarrow \left\|\tfrac{x+y}{2}\right\| \le 1 - \beta.$$

Por tanto,

$$s,t \in [0,2], \ \ |s-t| \geq \varepsilon \Rightarrow 1 - \left\| \tfrac{\Psi(s,x)+\Psi(t,x)}{2} \right\| \geq \beta, \text{ para todo } x \in B.$$

Consideremos ahora $x \in B$ y definamos $X_0 = \text{lin}\{x, v(\frac{x}{\|x\|})\}$. Sea además $x^* \in X_0^* \backslash \{0\}$ con $\ker x^* = \text{lin}\{x\}$ y $x^*(v(\frac{x}{\|x\|})) \geq 0$.

Obviamente, $\Psi(t,x) \in S(x^*)$, para todo $t \in [0,2]$. En virtud del Teorema 2.6, cualesquiera que sean $s,t \in [0,2]$,

$$|\|2x - \Psi(s,x)\| - \|2x - \Psi(t,x)\|| \geq \tfrac{1}{6} \left(\min\{1, \|2x\|^2\}\right) \left(1 - \left\| \tfrac{\Psi(s,x)+\Psi(t,x)}{2} \right\|\right).$$

Por tanto, para $|s-t| \geq \varepsilon$

$$|\|2x - \Psi(s,x)\| - \|2x - \Psi(t,x)\|| \geq \tfrac{\beta}{6} \min\{1, 4\rho^2\}, \text{ para todo } x \in B.$$

En definitiva, dado $\varepsilon \in]0,2]$, existe $\eta > 0$ tal que

$$x \in B, \ \ s,t \in [0,2], \ \ |s-t| \geq \varepsilon \Rightarrow |\,\|2x - \Psi(s,x)\| - \|2x - \Psi(t,x)\|| \geq \eta. \tag{4.3}$$

En particular,

$$x \in B, \ \ s,t \in [0,2], \ \ s \neq t \Rightarrow ||2x - \Psi(s,x)|| \neq ||2x - \Psi(t,x)||. \tag{4.4}$$

Sea $x \in B$. Entonces,

$$||2x - \Psi(0,x)|| = ||2x - \tfrac{x}{||x||}|| = ||\tfrac{x(2||x||-1)}{||x||}|| = |2||x|| - 1| \leq 1.$$

Además,

$$||2x - \Psi(2,x)|| = ||2x + \tfrac{x}{||x||}|| = 2||x|| + 1 \geq 2\rho + 1 > 1.$$

Como consecuencia, existe $t \in [0,2]$ tal que $||2x - \Psi(t,x)|| = 1$. Teniendo en cuenta (4.4), t es único y lo denotaremos por $t(x)$.

Nuestro objetivo es probar que la aplicación $x \mapsto t(x)$, de B en $[0,2]$, es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon \in]0,2]$ y $\eta > 0$ como en (4.3). Haciendo uso de la continuidad uniforme de Ψ obtenemos un número real positivo δ_0 tal que

$$t \in [0,2],\ x,y \in B,\ ||x-y|| < \delta_0 \Rightarrow |\,||2x - \Psi(t,x)|| - ||2y - \Psi(t,y)||\,| < \tfrac{\eta}{2}$$

Por lo tanto, dados $x, y \in B$ con $||x-y|| < \delta_0$ y $s,t \in [0,2]$ con $|s-t| \geq \varepsilon$, tenemos $|\,||2x - \Psi(s,x)|| - ||2y - \Psi(t,y)||\,| =$

$$= |\,||2x - \Psi(s,x)|| - ||2x - \Psi(t,x)|| + ||2x - \Psi(t,x)|| - ||2y - \Psi(t,y)||\,|$$

$$\geq |\,||2x - \Psi(s,x)|| - ||2x - \Psi(t,x)||\,| - |\,||2x - \Psi(t,x)|| - ||2y - \Psi(t,y)||\,| > \tfrac{\eta}{2}\,.$$

Así, para $\varepsilon \in]0,2]$, existen $\delta_0, \eta \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$x,y \in B,\ s,t \in [0,2],\ ||x-y|| < \delta_0,\ |s-t| \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\,||2x - \Psi(s,x)|| - ||2y - \Psi(t,y)||\,| > \tfrac{\eta}{2}\,.$$

Supongamos que la aplicación $x \mapsto t(x)$ no es uniformemente continua. Entonces, existe un número real $\varepsilon \in]0,2]$ y dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, de elementos de B, tales que $\{x_n - y_n\} \to 0$ y $|t(x_n) - t(y_n)| \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean δ_0 y η los números reales positivos correspondientes a ε de acuerdo con la argumentación precedente. Si n es un número natural tal que $||x_n - y_n|| < \delta_0$, entonces

$$0 = |\,||2x_n - \Psi(t(x_n), x_n)|| - ||2y_n - \Psi(t(y_n), y_n)||\,| > \tfrac{\eta}{2}.$$

La contradicción muestra que $x \mapsto t(x)$ es uniformemente continua. Por tanto, las aplicaciones $\phi_1, \phi_2 : B \to S_X$ dadas por

$$\phi_1(x) = \Psi(t(x), x),\ \phi_2(x) = 2x - \Psi(t(x), x),\ \text{para cada } x \in B$$

son uniformemnente continuas y evidentemente $x = \frac{\phi_1(x)+\phi_2(x)}{2}$, para cada $x \in B$. ∎

A continuación, una observación geométrica:

Lema 4.14 *Sea X un espacio normado, $x_0 \in S_X$ y $\varepsilon_0 \in]0,1[$. Consideremos $a, b \in S_X$ y supongamos que, dado $k \in \{1,2\}$, existen $s_k, \xi_k \in [0,1]$ tales que $\left\|(1-s_k)a + s_k b + (-1)^k \xi_k x_0\right\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4}$. Entonces $\|a+b\| \leq \varepsilon_0$.*

Demostración:

Veamos en primer lugar que existe $s \in [0,1]$ tal que

$$\|(1-s)a + sb\| \leq \tfrac{\varepsilon_0}{4}.$$

Puesto que esto es evidente si $\xi_1 + \xi_2 = 0$, supondremos que $\xi_1 + \xi_2 > 0$. Para $k = 1, 2$, sea $x_k = (1-s_k)a + s_k b$. Entonces

$$\left\|\tfrac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\, x_1 + \tfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}\, x_2\right\| = \left\|\tfrac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\, x_1 - \tfrac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\, \xi_1 x_0 + \tfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}\, \xi_2 x_0 + \tfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}\, x_2\right\|$$

$$\leq \tfrac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\, \|x_1 - \xi_1 x_0\| + \tfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}\, \|\xi_2 x_0 + x_2\| \leq \tfrac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2} \tfrac{\varepsilon_0}{4} + \tfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2} \tfrac{\varepsilon_0}{4} = \tfrac{\varepsilon_0}{4}$$

y por tanto basta poner $s = \frac{\xi_2 s_1 + \xi_1 s_2}{\xi_1+\xi_2}$.

Si $x = (1-s)a + sb$, es claro que

$$s = \|sb\| = \|x - (1-s)a\| \geq 1 - s - \|x\| \geq 1 - s - \tfrac{\varepsilon_0}{4}.$$

Por tanto $s \geq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_0}{8}$. De forma análoga

$$s \leq \|x\| + 1 - s \leq \tfrac{\varepsilon_0}{4} + 1 - s$$

y así $s \leq \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_0}{8}$. Luego $\left|s - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\varepsilon_0}{8}$ y, de este modo

$$\|a+b\| = 2\left\|\tfrac{a+b}{2} - (1-s)a - sb + x\right\| = 2\left\|(\tfrac{1}{2} - 1 + s)a + (\tfrac{1}{2} - s)b + x\right\|$$

$$\leq 2(\left|s-\tfrac{1}{2}\right| + \left|s-\tfrac{1}{2}\right| + \|x\|) = 4\left|s-\tfrac{1}{2}\right| + 2\|x\| \leq \tfrac{\varepsilon_0}{2} + \tfrac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0. \quad \blacksquare$$

Probamos ya uno de los resultados que habíamos anunciado al comienzo de esta sección.

Proposición 4.15 *Sea M un espacio métrico, X un espacio normado uniformemente convexo de dimensión mayor o igual que dos y f una aplicación uniformemente continua de M en B_X. Supongamos que existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$ tal que $\|f(t)\| \geq \varepsilon_0$, para todo $t \in M$. Entonces f es la media de cuatro puntos extremos de la bola unidad de $U(M,X)$.*

Demostración:

Fijemos un punto $x_0 \in S_X$ y consideremos para cada $\rho \in [0,1]$, los siguientes conjuntos cerrados:

$$A_\rho = \{x \in B_X : d(x,[0,x_0]) \leq \rho\},\ A_\rho^- = \{x \in B_X : d(x,[0,-x_0]) \leq \rho\},$$

$$B_\rho = \{x \in B_X : d(x,[0,x_0]) \geq \rho\},\ B_\rho^- = \{x \in B_X : d(x,[0,-x_0]) \geq \rho\}.$$

De acuerdo con la Proposición 4.13, existen cuatro aplicaciones uniformemente continuas $\phi_1, \phi_2 : B_{\varepsilon_0/8} \to S_X$, $\phi_1^-, \phi_2^- : B_{\varepsilon_0/8}^- \to S_X$, tales que

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\phi_1(x) + \phi_2(x)\right), \text{ para todo } x \in B_{\varepsilon_0/8} \tag{4.5}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\phi_1^-(x) + \phi_2^-(x)\right), \text{ para todo } x \in B_{\varepsilon_0/8}^-. \tag{4.6}$$

Es claro que $A_{\varepsilon_0/8} \cap B_{\varepsilon_0/4} = A_{\varepsilon_0/8}^- \cap B_{\varepsilon_0/4}^- = \emptyset$.

Sean $\lambda, \lambda^- : B_X \to [0,1]$ las aplicaciones definidas por

$$\lambda(x) = \tfrac{d(x,A_{\varepsilon_0/8})}{d(x,A_{\varepsilon_0/8}) + d(x,B_{\varepsilon_0/4})}, \quad \lambda^-(x) = \tfrac{d(x,A_{\varepsilon_0/8}^-)}{d(x,A_{\varepsilon_0/8}^-) + d(x,B_{\varepsilon_0/4}^-)}, \text{ para todo } x \in B_X.$$

De acuerdo con los comentarios expuestos tras la Proposición 4.7, λ y λ^- son lipschitzianas y, en particular, uniformemente continuas. Por otra parte, la Proposición 4.8 permite afirmar que también son uniformemente continuas las aplicaciones g y h, de M en X, dadas como sigue:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad f(t) \in A_{\varepsilon_0/8} \\ f(t) + \frac{1}{2}\lambda(f(t))[\phi_1(f(t)) - \phi_2(f(t))] & \text{si} \quad f(t) \in B_{\varepsilon_0/8} \end{cases}$$

y $h = 2f - g$ (nótese que $\left\| \frac{1}{2}\lambda(f(t))[\phi_1(f(t)) - \phi_2(f(t))] \right\| \leq |\lambda(f(t))|$, para todo $t \in M$ y que $\lambda \circ f$ cumple la condición (4.2)).

Sea t un punto arbitrario de M. Si $f(t) \in B_{\varepsilon_0/8}$, la igualdad (4.5) permite afirmar que

$$\begin{aligned} g(t) &= \tfrac{1}{2}\left(\phi_1(f(t)) + \phi_2(f(t))\right) + \tfrac{1}{2}\lambda(f(t))\left(\phi_1(f(t)) - \phi_2(f(t))\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 + \lambda(f(t))\right)\phi_1(f(t)) + \tfrac{1}{2}\left(1 - \lambda(f(t))\right)\phi_2(f(t)), \end{aligned} \tag{4.7}$$

mientras que

$$h(t) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \lambda(f(t))\right)\phi_1(f(t)) + \tfrac{1}{2}\left(1 + \lambda(f(t))\right)\phi_2(f(t)). \tag{4.8}$$

En particular, $\|g(t)\| \leq 1$ y $\|h(t)\| \leq 1$. Además, ambas desigualdades son evidentes si $f(t) \in A_{\varepsilon_0/8}$ pues, en tal caso

$$g(t) = f(t) = h(t).$$

Definimos ahora cuatro funciones uniformemente continuas e_1, e_2, e_3, e_4, de M en X, mediante las siguientes expresiones:

$$e_1(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si} \quad g(t) \in A^-_{\varepsilon_0/8} \\ g(t) + \frac{1}{2}\lambda^-(g(t))[\phi_1^-(g(t)) - \phi_2^-(g(t))] & \text{si} \quad g(t) \in B^-_{\varepsilon_0/8} \end{cases}$$

$$e_3(t) = \begin{cases} h(t) & \text{si} \quad h(t) \in A^-_{\varepsilon_0/8} \\ h(t) + \frac{1}{2}\lambda^-(h(t))[\phi_1^-(h(t)) - \phi_2^-(h(t))] & \text{si} \quad h(t) \in B^-_{\varepsilon_0/8} \end{cases}$$

$e_2 = 2g - e_1$ y $e_4 = 2h - e_3$. El razonamiento anteriormente realizado para las funciones g y h, nos permite afirmar de forma análoga que $\|e_i(t)\| \leq 1$, cualesquiera que sean $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $t \in M$. Evidentemente, $f = \frac{1}{2}(g + h)$, $g = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ y $h = \frac{1}{2}(e_3 + e_4)$. Por tanto,

$$f = \tfrac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

y sólo nos resta probar que $e_i(t) \in S_X$, para cada $t \in M$ y cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Con tal propósito, fijemos un punto $t \in M$. Si $f(t) \in B_{\varepsilon_0/4}$, entonces $\lambda(f(t)) = 1$ y, de acuerdo con (4.7) y (4.8), $g(t) = \phi_1(f(t))$ y $h(t) = \phi_2(f(t))$. En consecuencia, $\|g(t)\| = \|h(t)\| = 1$ y, puesto que X es estrictamente convexo,

$$\|e_i(t)\| = 1, \; i = 1, 2, 3, 4.$$

Supongamos que $f(t) \notin B_{\varepsilon_0/4}$. Entonces $f(t) \in A_{\varepsilon_0/4}$ y, por tanto, existe $\xi_1 \in [0, 1]$ tal que $\|f(t) - \xi_1 x_0\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4}$. En particular, $\|f(t) - \xi_1 x_0\| < \|f(t)\|$ con lo que $\xi_1 \neq 0$. Además, cualquiera que sea $\xi \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &= \left\| \tfrac{\xi}{\xi_1+\xi}(f(t) - \xi_1 x_0) + \tfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi}(f(t) + \xi x_0) \right\| \\ &\leq \tfrac{\xi}{\xi_1+\xi} \|f(t)\| + \tfrac{\xi_1}{\xi_1+\xi} \|f(t) + \xi x_0\| \end{aligned}$$

por lo que necesariamente $\|f(t) + \xi x_0\| \geq \|f(t)\|$. Así pues,

$$d(f(t), [0, -x_0]) = \|f(t)\| \geq \varepsilon_0.$$

Mostraremos a continuación que $g(t), h(t) \in B^-_{\varepsilon_0/4}$: Esto es claro si $f(t)$ pertenece a $A_{\varepsilon_0/8}$ ya que en este caso $g(t) = f(t) = h(t)$ y acabamos de probar que $d(f(t), [0, -x_0]) \geq \varepsilon_0 > \frac{\varepsilon_0}{4}$. Supongamos pues que $f(t) \notin A_{\varepsilon_0/8}$. Entonces $f(t) \in B_{\varepsilon_0/8}$ y, definiendo $a = \phi_1(f(t))$, $b = \phi_2(f(t))$ y $s = \frac{1}{2}(1 - \lambda(f(t)))$, las igualdades (4.5), (4.7) y (4.8) garantizan que

$$f(t) = \tfrac{a+b}{2}, \quad g(t) = (1 - s)a + sbyh(t) = sa + (1 - s)b.$$

En particular,

$$\|a+b\| \geq 2\varepsilon_0. \tag{4.9}$$

Supongamos, para llegar a una contradicción, que $g(t) \notin B^-_{\varepsilon_0/4}$. Entonces $g(t) \in A^-_{\varepsilon_0/4}$ y, por tanto, existe $\xi_2 \in [0,1]$ tal que $\|g(t)+\xi_2 x_0\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4}$. Aplicando el Lema 4.14 con $s_1 = \frac{1}{2}$ y $s_2 = s$ obtenemos que $\|a+b\| \leq \varepsilon_0$, lo cual es imposible en vista de (4.9). Lo mismo ocurre si se supone que $h(t) \notin B^-_{\varepsilon_0/4}$. El razomiento es el mismo sin más que definir en este caso $s_2 = 1-s$.

Por tanto $g(t), h(t) \in B^-_{\varepsilon_0/4}$ y así $\lambda^-(g(t)) = \lambda^-(h(t)) = 1$. Puesto que $B^-_{\varepsilon_0/4} \subset B^-_{\varepsilon_0/8}$, la igualdad (4.6) y la propia definición de las funciones e_i permiten deducir que $e_1(t) = \phi_1^-(g(t))$, $e_2(t) = \phi_2^-(g(t))$, $e_3(t) = \phi_1^-(h(t))$ y $e_4(t) = \phi_2^-(h(t))$. Luego $\|e_i(t)\| = 1$, para cada $i \in \{1,2,3,4\}$. ∎

Finalmente, probamos el resultado principal:

Teorema 4.16 *Sean M un espacio métrico, X un espacio normado uniformemente convexo de dimensión distinta de uno e $Y = U(M,X)$. Entonces*

$$\{y \in Y : \|y\| < 1\} \subset \mathrm{co}(E_Y).$$

Como consecuencia,

$$B_Y = \overline{\mathrm{co}}(E_Y).$$

Demostración:

Fijemos un punto $y_0 \in Y$ con $\|y_0\| < 1$ y sea $e \in E_Y$. Veamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existen 4^n puntos extremos de la bola unidad de Y, $e_{n,1}, e_{n,2}, \ldots, e_{n,4^n}$, tales que

$$\tfrac{1}{2^n}\, e + (1 - \tfrac{1}{2^n}) y_0 = \tfrac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{4^n} e_{n,k}\,. \tag{4.10}$$

Dado $t \in M$, es claro que

$$\|(e+y_0)(t)\| \geq \|e(t)\| - \|y_0(t)\| = 1 - \|y_0(t)\| \geq 1 - \|y_0\| > 0.$$

Por tanto la función $e + y_0$ y, en consecuencia, también la función $\frac{1}{2}(e+y_0)$, omite un entorno del origen. En virtud de la Proposición 4.15, la afirmación (4.10) se verifica para $n = 1$. Supongamos, razonando por inducción, que dicha afirmación es cierta para un natural n y sean $e_{n,1}, e_{n,2}, \ldots, e_{n,4^n} \in E_Y$ que satisfagan la igualdad (4.10). Entonces,

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2^n}e + (1-\tfrac{1}{2^n})y_0 + y_0\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4^n}\sum\nolimits_{k=1}^{4^n} e_{n,k} + y_0\right) = \tfrac{1}{4^n}\sum\nolimits_{k=1}^{4^n} \tfrac{e_{n,k}+y_0}{2}\,.$$

Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, 4^n\}$ la función $\frac{e_{n,k}+y_0}{2}$ es, de acuerdo con la Proposición 4.15, la media de cuatro puntos extremos de la bola unidad de Y. Así pues, existen 4^{n+1} elementos de E_Y, $e_{n+1,1}, e_{n+1,2}, \ldots, e_{n+1,4^{n+1}}$, tales que

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2^n}e + (1-\tfrac{1}{2^n})y_0 + y_0\right) = \tfrac{1}{4^{n+1}}\sum\nolimits_{k=1}^{4^{n+1}} e_{n+1,k}\,,$$

es decir, $\frac{1}{2^{n+1}}e + (1-\frac{1}{2^{n+1}})y_0 = \frac{1}{4^{n+1}}\sum_{k=1}^{4^{n+1}} e_{n+1,k}$, lo que prueba (4.10) para $n+1$.

Para terminar sea $y \in Y$ con $\|y\| < 1$ y n un natural tal que

$$\|y\| < 1 - \tfrac{1}{2^{n-1}}.$$

Consideremos $y_0 = \frac{2^n y - e}{2^n - 1}$ y observemos que

$$\|y_0\| < \tfrac{2^n(1-\frac{1}{2^{n-1}})+1}{2^n-1} = \tfrac{2^n-2+1}{2^n-1} = 1.$$

De acuerdo con lo ya demostrado, existen 4^n funciones $e_1, e_2, \ldots, e_{4^n} \in E_Y$ tales que

$$\tfrac{1}{2^n}e + (1-\tfrac{1}{2^n})y_0 = \tfrac{1}{4^n}\sum\nolimits_{k=1}^{4^n} e_k\,.$$

De ello se deduce que

$$y = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{4^n} e_k \, .$$

Luego $y \in \mathrm{co}(E_Y)$, como queríamos demostrar. ■

Un rápido análisis de la argumentación que ha conducido al resultado anterior muestra que la estructura métrica de M sólo se ha usado para dar sentido a la consideración del espacio $U(M, X)$. De hecho, la Proposición 4.15 y el Teorema 4.16 son también válidos si M es un espacio uniforme.

Las técnicas desarrolladas en este trabajo permiten afirmar, por otra parte, que ambos resultados se verifican si M es un espacio topológico e $Y = C(M, X)$, el espacio de las funciones continuas y acotadas de M en X con la norma uniforme. Además, en este último caso, basta suponer que X es estrictamente convexo (con $\dim X \geq 2$).

En todas las situaciones comentadas es claro que $Y = \mathrm{lin}\, E_Y$, la expansión lineal de E_Y. Una consecuencia que no puede derivarse de los resultados de [42].

4.4 Combinaciones convexas de retracciones uniformemente continuas

En esta sección aplicaremos nuevamente el Teorema 2.6 para mostrar que la identidad en la bola unidad de un espacio de Banach infinito dimensional y uniformemente convexo X, es media de n retracciones uniformemente continuas de B_X sobre S_X, cualquiera que sea $n \geq 3$. Como ya se indicó al comienzo del capítulo, este tipo de resultados permite derivar información relevante sobre la estructura extremal de los espacios de funciones uniformemente continuas vectorialmente valuadas.

El primer resultado sobre combinaciones convexas de retracciones apareció en [6] donde se probó que la identidad sobre la bola unidad de un espacio de Banach estrictamente convexo e infinito-dimensional, es la media de cuatro retracciones continuas de la bola sobre la esfera unidad. Posteriormente este resultado fue mejorado en [44] mostrando que, de hecho, la identidad es media de n retracciones para cada número natural $n \geq 3$. Se obtuvieron en realidad representaciones más generales que la media, demostrando que son factibles combinaciones convexas prácticamente arbitrarias. En esta misma referencia se observó que la identidad no se puede expresar como media de dos retracciones continuas, ni tan siquiera de dos funciones continuas de la bola en la esfera, con lo que el número tres resultaba ser óptimo.

Y. Benyamini e Y. Sterfeld probaron en [4] la existencia de retracciones lipschitzianas de la bola sobre la esfera unidad en cada espacio normado infinito dimensional. Por tanto, es natural preguntarse si las representaciones de la identidad como combinación convexa de retracciones son también posibles con mejores propiedades que la mera continuidad. Hemos de señalar, no obstante, que en general no es posible representar la identidad en B_X como combinación convexa de un número finito de retracciones lipschitzianas. Este hecho se puso de manifiesto en [27] siendo X un espacio de Hilbert real e infinito-dimensional. Para un tal X ni siquiera es posible expresar la identidad como combinación convexa de un número finito de retracciones localmente lipschitzianas. Sin embargo, entre la condición de Lipschitz y la continuidad existen otras propiedades como la continuidad uniforme. Un resultado positivo en esta dirección puede verse en [27] donde se prueba que si X es un espacio de Banach complejo e infinito-dimensional, la identidad en B_X admite representaciones como combinación convexa de retracciones uniformemente continuas.

El principal objetivo del presente apartado es demostrar que este último resultado es válido para cada espacio normado real infinito-dimensional y uniformemente convexo. En realidad, las técnicas que hemos desarrollado requieren una propiedad más débil que la convexidad uniforme pues, de hecho, la verifica automáticamente cualquier espacio normado complejo. Así pues, conseguimos una extensión sustancial de los precedentes mencionados.

Conviene resaltar que la existencia de representaciones de la identidad como combinación convexa de retracciones implica la presencia de algún tipo de estructura adicional sobre el espacio normado X, aparte de la infinitud de su dimensión. Como hemos dicho, la situación es favorable si X es un espacio complejo. Para representaciones mediante retracciones continuas también es válida la condición de convexidad estricta y, como hemos anunciado, para representaciones en términos de retracciones uniformemente continuas resulta operativa la convexidad uniforme. Si no imponemos una condición adecuada estas descomposiciones de la identidad pueden ser inviables. El espacio l_∞ de las sucesiones acotadas de números reales con su norma canónica ilustra esta situación.

Veamos que la identidad en B_{l_∞} no se puede expresar como combinación convexa de retracciones continuas.

Para ello, consideremos el elemento $e_1 = (1, 0, 0, \ldots) \in l_\infty$ y observemos que

$$x \in S_{l_\infty}, \|x - e_1\| < 1 \Rightarrow x(1) = 1.$$

En efecto, sea $x \in S_{l_\infty}$ con $\|x - e_1\| < 1$. Entonces $|x(n)| \leq \|x - e_1\| < 1$, para todo $n > 1$. Como $\|x\| = 1$, necesariamente $|x(1)| = 1$ y de ello se sigue que $x(1) = 1$ usando nuevamente la desigualdad $\|x - e_1\| < 1$.

Supongamos ahora que para algún natural p existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in [0, \frac{1}{2}[$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 1$ y $r_1, \ldots, r_p$ retracciones continuas de la bola en la esfera unidad de l_∞ con la condición de que

$$x = \lambda_1 r_1(x) + \cdots + \lambda_p r_p(x), \text{ para todo } x \in B_{l_\infty}. \tag{4.11}$$

Por la continuidad de $r_1, \ldots, r_p$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_{l_\infty}$ y $\|x - e_1\| < \delta$ entonces $\|r_j(x) - e_1\| = \|r_j(x) - r_j(e_1)\| < 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$. Del razonamiento anterior se sigue que $r_j(x)(1) = 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$ y todo $x \in B_{l_\infty}$ con $\|x - e_1\| < \delta$.

Consideremos un natural $m > \frac{1}{\delta} - 1$. Entonces $\left\|\frac{m}{m+1}e_1 - e_1\right\| < \delta$ y en consecuencia $r_j(\frac{m}{m+1}e_1)(1) = 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$. A partir de (4.11) obtenemos que

$$\tfrac{m}{m+1} = (\tfrac{m}{m+1}e_1)(1) = \left[\lambda_1 r_1(\tfrac{m}{m+1}e_1) + \cdots + \lambda_p r_p(\tfrac{m}{m+1}e_1)\right](1) = 1,$$

lo que es una contradicción. ∎

A continuación abordamos el primer resultado importante de esta sección. La demostración sigue esencialmente el esquema de la Proposición 4.13. No obstante, dada su trascendencia en esta última parte del capítulo, creemos conveniente hacer explícitos todos los retoques necesarios y, por tanto, incorporamos la demostración.

Teorema 4.17 *Sea X un espacio normado uniformemente convexo e infinito-dimensional. Consideremos $\alpha \in]0,1[$, $\lambda \in [\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1}{2}]$ y*

$$B = \{x \in X : \alpha \leq ||x|| \leq 1\}.$$

Entonces existen aplicaciones uniformemente continuas $u_1, u_2 : B \to S_X$, tales que

$$x = \lambda u_1(x) + (1-\lambda) u_2(x), \text{ para todo } x \in B.$$

Demostración:

En virtud del Teorema 3.5, existe una aplicación uniformemente continua $v : S_X \to S_X$ tal que $\inf \{||v(x) \pm x|| : x \in S_X\} > 0$. Sea $\varphi : [0,2] \times B \to B_X$ la aplicación definida por

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} (1-t)\frac{x}{||x||} + tv(\frac{x}{||x||}) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t)v(\frac{x}{||x||}) - (t-1)\frac{x}{||x||} & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

y ρ_0 un número real en el intervalo $]0,1[$ tal que

$$\inf \{||v(x) \pm x|| : x \in S_X\} \geq \rho_0.$$

Teniendo en cuenta los comentarios que siguen a la Proposición 4.6, se tiene que φ es uniformemente continua y que $||\varphi(t,x)|| \geq \frac{\rho_0}{4}$, para todo (t,x) perteneciente a $[0,2] \times B$. Así pues, la función $\Psi : [0,2] \times B \to S_X$ dada por $\Psi(t,x) = \frac{\varphi(t,x)}{||\varphi(t,x)||}$, para todo $(t,x) \in [0,2] \times B$ es también uniformemente continua.

Fijemos un número real $\varepsilon \in]0,2]$. En virtud del Lema 4.11, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$s,t \in [0,2],\ |s-t| \geq \varepsilon \Rightarrow ||\Psi(s,x) - \Psi(t,x)|| \geq \delta, \text{ para todo } x \in B.$$

Por otra parte, dado que X es uniformemente convexo, existe $\beta \in]0,1[$ tal que

$$z, w \in S_X,\ ||z-w|| \geq \delta \Rightarrow ||\tfrac{z+w}{2}|| \leq 1 - \beta.$$

Enlazando los hechos anteriores obtenemos que

$$s,t \in [0,2],\ |s-t| \geq \varepsilon \Rightarrow 1 - ||\tfrac{\Psi(s,x)+\Psi(t,x)}{2}|| \geq \beta, \text{ para todo } x \in B.$$

Consideremos ahora $x \in B$ y sea $X_0 = \operatorname{lin}\{x, v(\frac{x}{||x||})\}$. Sea $f \in X_0^*$ tal que $||f|| = 1$, $\ker f = \operatorname{lin}\{x\}$ y $f(v(\frac{x}{||x||})) \geq 0$. Evidentemente $f(\Psi(t,x)) \geq 0$, para todo $t \in [0,2]$. Por tanto, por el Teorema 2.6, tenemos cualesquiera que sean $s, t \in [0,2]$,

$$\begin{aligned} \left|\, \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(s,x)\| - \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)\| \,\right| &\geq \tfrac{1}{6}\min\{1, \|\tfrac{x}{\lambda}\|^2\}(1 - \|\tfrac{\Psi(s,x)+\Psi(t,x)}{2}\|) \\ &\geq \tfrac{1}{6}\min\{1, \tfrac{\alpha^2}{\lambda^2}\}(1 - \|\tfrac{\Psi(s,x)+\Psi(t,x)}{2}\|). \end{aligned}$$

En particular si $|s-t| \geq \varepsilon$,

$$\left|\, \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(s,x)\| - \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)\| \,\right| \geq \tfrac{1}{6}\min\{1, \tfrac{\alpha^2}{\lambda^2}\}\beta,$$

desigualdad válida, como puede apreciarse, para todo $x \in B$. En definitiva, acabamos de probar que para todo $\varepsilon \in]0,2]$, existe $\eta > 0$, tal que

$$s,t \in [0,2],\ |s-t| \geq \varepsilon \Rightarrow \left|\, \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(s,x)\| - \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)\| \,\right| \geq \eta, \text{ para cada } x \in B.$$

Como consecuencia, dados $x \in B$ y $s, t \in [0,2]$ con $s \neq t$, se tiene que

$$\|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(s,x)\| \neq \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)\|.$$

Pero aún podemos deducir otra desigualdad a partir de la anterior que resultará decisiva para conseguir nuestro objetivo.

Sean $\varepsilon \in]0,2]$ y $\eta > 0$ en las condiciones que hemos precisado. La continuidad uniforme de Ψ proporciona, en particular, un número real positivo δ_0 tal que

$$x, y \in B,\ \|x-y\| < \delta_0 \Rightarrow \left|\, \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)\| - \|\tfrac{y}{\lambda} - \Psi(t,y)\| \,\right| < \tfrac{\eta}{2},$$

para todo $t \in [0,2]$. Por tanto, dados $x, y \in B$, con $\|x-y\| < \delta_0$ y $s, t \in [0,2]$, con $|s-t| \geq \varepsilon$, tenemos $\left|\, \|\frac{x}{\lambda} - \Psi(s,x)\| - \|\frac{y}{\lambda} - \Psi(t,y)\| \,\right| =$

$$\begin{aligned} &= \left|\, \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(s,x)\| - \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)\| + \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)\| - \|\tfrac{y}{\lambda} - \Psi(t,y)\| \,\right| \\ &\geq \left|\, \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(s,x)\| - \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)\| \,\right| - \left|\, \|\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)\| - \|\tfrac{y}{\lambda} - \Psi(t,y)\| \,\right| \\ &> \tfrac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Así pues, dado $\varepsilon \in]0,2]$, existen $\delta_0, \eta \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\begin{aligned} x, y \quad &\in \quad B,\ s, t \in [0,2],\ ||x-y|| < \delta_0,\ |s-t| \geq \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |\,||\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(s,x)|| - ||\tfrac{y}{\lambda} - \Psi(t,y)||\,| > \tfrac{\eta}{2}\,. \end{aligned}$$

Sea $x \in B$ y observemos que $|||x|| - \lambda| \leq 1 - \lambda$ (si $||x|| \geq \lambda$, lo anterior se reduce a $||x|| \leq 1$ y, si $||x|| \leq \lambda$, $|||x|| - \lambda| = \lambda - ||x|| \leq \lambda \leq 1 - \lambda$). Por tanto,

$$||\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(0,x)|| = ||\tfrac{x}{\lambda} - \tfrac{x}{||x||}|| = \tfrac{|||x||-\lambda|}{\lambda} \leq \tfrac{1-\lambda}{\lambda}\,.$$

Además,

$$||\tfrac{x}{\lambda} - \Psi(2,x)|| = ||\tfrac{x}{\lambda} + \tfrac{x}{||x||}|| = \tfrac{||x||+\lambda}{\lambda} \geq \tfrac{\alpha+\lambda}{\lambda} \geq \tfrac{1-2\lambda+\lambda}{\lambda} = \tfrac{1-\lambda}{\lambda}\,.$$

Con lo cual, existe $t \in [0,2]$ tal que $||\frac{x}{\lambda} - \Psi(t,x)|| = \frac{1-\lambda}{\lambda}$. De acuerdo con lo probado anteriormente t es único y lo denotaremos por $t(x)$.

Veamos ahora que la aplicación $x \mapsto t(x)$, de B en $[0,2]$, es uniformemente continua. En caso contrario, existiría un número real $\varepsilon \in]0,2]$ y dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de elementos de B, tales que $\{x_n - y_n\}$ converge a cero y $|t(x_n) - t(y_n)| \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean δ_0 y η los números reales positivos que el razonamiento anterior asocia a ε. Si n es un número natural tal que $||x_n - y_n|| < \delta_0$, entonces

$$0 = |\,||\tfrac{x_n}{\lambda} - \Psi(t(x_n), x_n)|| - ||\tfrac{y_n}{\lambda} - \Psi(t(y_n), y_n)||\,| > \tfrac{\eta}{2}\,.$$

La contradicción pone de manifiesto que, en efecto, la aplicación $x \mapsto t(x)$ es uniformemente contiua. Además $||\frac{x}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{1-\lambda}\Psi(t(x),x)|| = 1$, para todo $x \in B$. Finalmente, las aplicaciones $u_1, u_2 : B \to S_X$ dadas por

$$u_1(x) = \Psi(t(x), x),\ u_2(x) = \tfrac{x}{1-\lambda} - \tfrac{\lambda}{1-\lambda}\Psi(t(x), x),\ \text{ para todo } x \in B$$

son uniformemente continuas y $x = \lambda u_1(x) + (1-\lambda) u_2(x)$, para todo $x \in B$.

$\blacksquare$

Es claro, en vista de la convexidad uniforme de X, que las aplicaciones u_1 y u_2 del teorema anterior son retracciones uniformemente continuas de B en S_X.

Corolario 4.18 *Sea X un espacio normado uniformemente convexo e infinito-dimensional y $h_1 : B_X \to S_X$, $h_2 : B_X \to B_X$ aplicaciones uniformemente continuas. Consideremos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R}^+$ con $\beta_1 > \beta_2$, $\beta_1+\beta_2 = \beta_3+\beta_4$ y $\beta_3, \beta_4 \in [\beta_2, \beta_1]$. Entonces existen dos aplicaciones uniformemente continuas $h_3, h_4 : B_X \to S_X$ tales que*

$$\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 = \beta_3 h_3 + \beta_4 h_4.$$

Demostración:

Supondremos, ya que no es restrictivo, que $\beta_3 \leq \beta_4$. Sean $\alpha = \frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_1+\beta_2}$, $\lambda = \frac{\beta_3}{\beta_1+\beta_2}$ y $B = \{x \in X : \alpha \leq ||x|| \leq 1\}$. Evidentemente $\alpha \in]0,1[$ y $\lambda \in [\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1}{2}]$. De acuerdo con el teorema anterior, existen $u_1, u_2 : B \to S_X$, uniformemente continuas tales que $x = \lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_2(x)$, para todo $x \in B$.

Consideremos la función $h = \frac{\beta_1 h_1+\beta_2 h_2}{\beta_1+\beta_2}$ y observemos que $h(x) \in B$, para todo $x \in B_X$. Por tanto,

$$h(x) = \lambda u_1(h(x)) + (1-\lambda)u_2(h(x)), \text{ para todo } x \in B_X.$$

De ello se deduce que, $\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 = \beta_3(u_1 \circ h) + \beta_4(u_2 \circ h)$. Basta pues considerar $h_3 = u_1 \circ h$ y $h_4 = u_2 \circ h$. $\blacksquare$

En el siguiente teorema haremos uso del resultado de Benyamini y Sternfeld sobre la existencia de retracciones lipschitzianas (luego uniformemente continuas) de la bola unidad sobre la esfera unidad de todo espacio normado infinito-dimensional.

Teorema 4.19 *Sea X un espacio normado uniformemente convexo e infinito-dimensional y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in]0, \frac{1}{2}[$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Entonces existen retracciones uniformemente continuas r_1, r_2, r_3, de B_X sobre S_X, tales que*

$$x = \lambda_1 r_1(x) + \lambda_2 r_2(x) + \lambda_3 r_3(x), \text{ para todo } x \in B_X.$$

Demostración:

Supongamos sin perder generalidad que $\lambda_1 = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ y sea r, de B_X en S_X, una aplicación uniformemente continua tal que $r(x) = x$, para todo $x \in S_X$. Consideremos un número real ε tal que $0 < \varepsilon < \min\{\frac{1}{2} - \lambda_1, \lambda_2\}$ y sean $\beta_1 = \lambda_1 + \varepsilon$, $\beta_2 = \lambda_2 - \varepsilon$. Evidentemente, $0 < \beta_2 < \beta_1 < \frac{1}{2}$. En virtud de la Proposición 4.6, la función $h_1 : B_X \to S_X$ definida por

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{||x||} & \text{si } \; ||x|| \geq 1 - 2\beta_1 \\ r(\frac{x}{1-2\beta_1}) & \text{si } \; ||x|| \leq 1 - 2\beta_1 \end{cases}$$

es uniformemente continua (basta considerar los conjuntos

$$A_1 = \{x \in B_X : \|x\| \geq 1 - 2\beta_1\},\ A_2 = \{x \in B_X : \|x\| \leq 1 - 2\beta_1\}$$

y observar, por un lado, que las funciones $h_1|_{A_1}$ y $h_1|_{A_2}$ son uniformemente continuas y, por otro, que dados $a \in A_1$ y $b \in A_2$, existe c en el segmento que determinan a y b tal que $\|c\| = 1 - 2\beta_1$. En particular, $c \in A_1 \cap A_2$, $\|a - c\| \leq \|a - b\|$ y $\|b - c\| \leq \|a - b\|$. La existencia del punto c se sigue obviamente de la continuidad de la función $t \to \|(1-t)a + tb\|$, de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Tras esto, véase la Proposición 4.6).

La aplicación $h_2 : B_X \to B_X$ dada por

$$h_2(x) = \frac{x - \beta_1 h_1(x)}{1 - \beta_1}, \text{ para todo } x \in B_X$$

es también uniformemente continua. Puesto que $\beta_1 + \beta_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, tenemos

$$x = \beta_1 h_1(x) + (1 - \beta_1)h_2(x) = \beta_1 h_1(x) + (\beta_2 + \lambda_3)h_2(x), \text{ para todo } x \in B_X .$$

Aplicando el corolario anterior con $\beta_3 = \beta_2$ y $\beta_4 = \beta_1$, obtenemos dos funciones uniformemente continuas $h_3, h_4 : B_X \to S_X$ tales que

$$\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 = \beta_2 h_3 + \beta_1 h_4.$$

De este modo,

$$x = \beta_1 h_4(x) + \beta_2 h_3(x) + \lambda_3 h_2(x), \text{ para todo } x \in B_X .$$

Por la misma razón existen $h_5, r_3 : B_X \to S_X$ uniformemente continuas, tales que $\beta_1 h_4 + \lambda_3 h_2 = \beta_1 h_5 + \lambda_3 r_3$. Luego

$$x = \beta_1 h_5(x) + \beta_2 h_3(x) + \lambda_3 r_3(x), \text{ para todo } x \in B_X .$$

Dado que $\lambda_1, \lambda_2 \in [\beta_2, \beta_1]$ y, como ya se ha dicho, $\beta_1 + \beta_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, una última aplicación del corolario anterior, garantiza la existencia de dos aplicaciones uniformemente continuas $r_1, r_2 : B_X \to S_X$ tales que

$$\beta_1 h_5 + \beta_2 h_3 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2.$$

Concluimos que

$$x = \lambda_1 r_1(x) + \lambda_2 r_2(x) + \lambda_3 r_3(x), \text{ para todo } x \in B_X. \quad \blacksquare$$

El teorema precedente y la Proposición 4.5 nos conducen al siguiente resultado:

Corolario 4.20 *Sean M un espacio métrico y X un espacio normado uniformemente convexo e infinito-dimensional. Dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in]0, \frac{1}{2}[$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, se verifica que*

$$B_{U(M,X)} = \lambda_1 E_{U(M,X)} + \lambda_2 E_{U(M,X)} + \lambda_3 E_{U(M,X)}.$$

La tesis del resultado anterior es válida en realidad para cualquier natural $n \geq 3$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in]0, \frac{1}{2}[$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Esto se deduce de la siguiente observación puramente algebraica:

Proposición 4.21 *Sea Y un espacio vectorial, B un subconjunto convexo no vacío de Y y $E \subset B$. Supongamos que*

$$B = \lambda_1 E + \lambda_2 E + \lambda_3 E,$$

para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Entonces B satisface, de hecho, la siguiente propiedad:

$$B = \lambda_1 E + \cdots + \lambda_n E,$$

para cada natural $n \geq 3$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Demostración:

Para $n = 3$ es precisamente la hipótesis de partida. Razonando por inducción, supongamos que se cumple para un determinado $n \geq 3$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$. Podemos suponer, por una parte que todos los λ_i con $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ son distintos de cero (puesto que en caso contrario aplicaríamos la hipótesis de inducción) y, sin perder generalidad , por otra parte que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \lambda_{n+1}$.

Si $\lambda_n + \lambda_{n+1} < \frac{1}{2}$ sean $\beta_1 = \lambda_1, \ldots, \beta_{n-1} = \lambda_{n-1}, \beta_n = \lambda_n + \lambda_{n+1}$. De acuerdo con la hipótesis de inducción,

$$B = \beta_1 E + \cdots + \beta_n E \subset \lambda_1 E + \cdots + \lambda_n E + \lambda_{n+1} E \subset B.$$

Supongamos ahora que $\lambda_n + \lambda_{n+1} \geq \frac{1}{2}$ y veamos que entonces $\lambda_1 = \lambda_{n+1}$. Si fuese $\lambda_1 > \lambda_{n+1}$ se tendría $\lambda_1 + \lambda_2 > \lambda_2 + \lambda_{n+1} \geq \lambda_n + \lambda_{n+1}$ con lo que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} > 2(\lambda_n + \lambda_{n+1}) \geq 1$ lo cual es una contradicción.

De este modo $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Obsérvese además que, necesariamente, $\lambda_n + \lambda_{n+1} = \frac{1}{2}$. En consecuencia $\frac{2}{n+1} = \lambda_n + \lambda_{n+1} = \frac{1}{2}$, de donde $n+1 = 4$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{4}$. Sólo nos queda ver que $B = \frac{E+E+E+E}{4}$, lo que se deduce de lo que sigue:

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{4}E + \tfrac{3}{8}E + \tfrac{3}{8}E = \tfrac{1}{4}E + \tfrac{3}{8}(E+E) = \tfrac{1}{4}E + \frac{3}{4}(\tfrac{E+E}{2}) \\ &\subset \tfrac{1}{4}E + \tfrac{3}{4}B \subset \tfrac{1}{4}E + \tfrac{3}{4}\tfrac{E+E+E}{3} = \tfrac{E+E+E+E}{4} \subset B. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La Proposición 4.5 nos permite completar el Teorema 4.19 en el siguiente sentido:

Dados un natural $n \geq 3$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, existen retracciones uniformemente continuas $r_1, \ldots, r_n$, de B_X sobre S_X, tales que

$$x = \lambda_1 r_1(x) + \cdots + \lambda_n r_n(x), \text{ para todo } x \in B_X. \tag{4.12}$$

Un análisis detallado muestra que la hipótesis sobre X usada en la demostración del Teorema 4.17 puede ser debilitada. En este sentido, es suficiente suponer que existe una aplicación uniformemente continua $v : S_X \to S_X$ con

$$\inf\{||v(x) \pm x|| : x \in S_X\} > 0$$

y para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$ existe $\beta \in]0,1[$ tal que,

$$x \in S_X,\ z, w \in S_X \cap \operatorname{lin}\{x, v(x)\}, ||z-w|| \geq \delta \Rightarrow ||\tfrac{z+w}{2}|| \leq 1-\beta.$$

Si X es un espacio complejo la aplicación $v(x) = ix$ satisface la condición anterior. Así pues, los resultados relativos al caso complejo que se citaron en la introducción de esta sección son un caso particular de (4.12).

Capítulo 5

Diámetro, puntos extremos y topología

Ya en la recta final de la memoria incorporamos un capítulo muy breve que servirá como botón de muestra de lo que puede representar una línea de trabajo para el futuro directamente relacionada con el contenido de la tesis. No obstante, supone una ruptura importante con los elementos disponibles en los capítulos precedentes, puesto que se sustituye la norma uniforme por el diámetro de la imagen de las funciones presentes en el espacio. Un funcional que en los últimos años ha sido considerado por diversos autores para la obtención de teoremas de tipo Banach-Stone. El primer trabajo sobre biyecciones lineales que preservan el diámetro es debido a M. Györy y L. Molnár [22]. Nuestro objetivo es, en consonancia con el planteamiento de la memoria, la obtención de teoremas de tipo Krein-Milman en espacios de funciones continuas con la norma del diámetro.

Hemos de reconocer cierto abuso en la frase anterior, pues el diámetro es, en general, tan sólo una seminorma. No obstante, como enseguida veremos, podemos soslayar este hecho pasando a un conveniente cociente.

En lo que sigue K será un espacio compacto de Hausdorff y denotaremos por $C(K)$ el espacio de las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$. Para cada f en $C(K)$, $\rho(f)$ denotará el diámetro de $f(K)$:

$$\rho(f) = \max\{|f(t) - f(t')| : t, t' \in K\}.$$

El diámetro es evidentemente una seminorma sobre $C(K)$ y, dada $f \in C(K)$, $\rho(f) = 0$ si, y sólo si, f es constante. El cociente de $C(K)$ sobre las funciones constantes se convierte de forma natural en un espacio de Banach con respecto al diámetro sin más que definir $\rho([f]) = \rho(f)$, para toda $f \in C(K)$.

Alternativamente, podemos fijar un punto $t_0 \in K$ y considerar el siguiente subespacio de $C(K)$:

$$X = \{f \in C(K) : f(t_0) = 0\}.$$

En lo que sigue trabajaremos con este subespacio ya que, provisto del diámetro, es un espacio de Banach isométricamente isomorfo al citado cociente. Supondremos, para que X sea distinto de $\{0\}$, que K tiene al menos dos puntos. La norma que consideraremos en X, el diámetro, es equivalente a la norma uniforme. De hecho:

$$||f||_\infty \leq \rho(f) \leq 2||f||_\infty, \text{ para todo } f \in X.$$

Comenzaremos con una sencilla descripción de los puntos extremos de B_X.

Lema 5.1 *Los puntos extremos de la bola unidad de X son las funciones $e \in X$ tales que $e(K) = \{0, 1\}$ o $e(K) = \{-1, 0\}$.*

Demostración:

Sea $e \in X$ tal que $e(K) = \{0,1\}$ o $e(K) = \{-1,0\}$ y consideremos $f, g \in X$ con $\rho(f) \leq 1$, $\rho(g) \leq 1$ y $e = \frac{f+g}{2}$. Dado $t \in K$, con $|e(t)| = 1$, es obvio que $e(t) = f(t) = g(t)$. Supongamos que $e(t) = 0$ y consideremos un punto $t' \in K$ tal que $|e(t')| = 1$. Entonces $e(t') = f(t') = g(t')$ y

$$e(t') = e(t') - e(t) = \tfrac{f(t')+g(t')}{2} - \tfrac{f(t)+g(t)}{2} = \tfrac{f(t')-f(t)}{2} + \tfrac{g(t')-g(t)}{2}.$$

Puesto que $|e(t')| = 1$ y $|f(t') - f(t)| \leq 1$, $|g(t') - g(t)| \leq 1$, se deduce de lo anterior que

$$e(t') = f(t') - f(t) = g(t') - g(t).$$

Así pues, $e(t) = 0 = f(t) = g(t)$.

Recíprocamente, sea e es un punto extremo de la bola unidad de X. Para cada $t \in K$ definamos

$$\alpha(t) = \max\{|e(t) - e(t')| : t' \in K\}$$

y fijemos un punto $t_1 \in K$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\alpha(t_1) < 1$ y sea $\varepsilon \in \left]0, \frac{1-\alpha(t_1)}{2}\right[$. Consideremos una función continua $\varphi : K \to [0,1]$ tal que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |e(t) - e(t_1)| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad |e(t) - e(t_1)| \geq \frac{1-\alpha(t_1)}{2} \end{cases}$$

y sean $t, t' \in K$. Supongamos que $|e(t) - e(t_1)| \leq \frac{1-\alpha(t_1)}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} & |(e(t) \pm \tfrac{1-\alpha(t_1)}{2}\varphi(t)) - (e(t') \pm \tfrac{1-\alpha(t_1)}{2}\varphi(t'))| \\ = \ & |e(t) - e(t') \pm \tfrac{1-\alpha(t_1)}{2}(\varphi(t) - \varphi(t'))| \\ \leq \ & |e(t) - e(t')| + \tfrac{1-\alpha(t_1)}{2} \\ \leq \ & |e(t) - e(t_1)| + |e(t_1) - e(t')| + \tfrac{1-\alpha(t_1)}{2} \\ \leq \ & \tfrac{1-\alpha(t_1)}{2} + \alpha(t_1) + \tfrac{1-\alpha(t_1)}{2} = 1. \end{aligned}$$

Naturalmente lo mismo ocurre si $|e(t') - e(t_1)| \leq \frac{1-\alpha(t_1)}{2}$. Por otra parte, si $|e(t) - e(t_1)| \geq \frac{1-\alpha(t_1)}{2}$ y $|e(t') - e(t_1)| \geq \frac{1-\alpha(t_1)}{2}$, tenemos que

$$|(e(t) \pm \tfrac{1-\alpha(t_1)}{2}\varphi(t)) - (e(t') \pm \tfrac{1-\alpha(t_1)}{2}\varphi(t'))| = |e(t) - e(t')| \leq 1.$$

Esto prueba que $\rho(e \pm \frac{1-\alpha(t_1)}{2}\varphi) \leq 1$ y contradice, pues $\varphi \neq 0$, que e sea un punto extremo de la bola unidad de X.

En consecuencia, dada la arbitrariedad de t_1, se tiene que $\alpha(t) = 1$, para todo $t \in K$. En concreto, $\alpha(t_0) = 1$ y por tanto $e(K) \cap \{-1, 1\} \neq \emptyset$. Si $1 \in e(K)$ entonces $0 \leq e(t) \leq 1$, para todo $t \in K$ y, de acuerdo con lo anterior, no existe ningún punto $t \in K$ tal que $0 < e(t) < 1$. Así pues $e(K) = \{0, 1\}$. Si $-1 \in e(K)$ se tiene de forma similar que $e(K) = \{-1, 0\}$.

■

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente resultado:

Corolario 5.2 *$E_X \neq \emptyset$ si, y sólo si, K no es conexo.*

En particular, la geometría de X con el diámetro difiere en general de su geometría con la norma uniforme. Así por ejemplo, si K no tiene puntos aislados y no es conexo, E_X es no vacío en virtud del corolario anterior pero la bola unidad de X, con la norma uniforme, no posee puntos extremos.

Por otra parte, el corolario precedente pone de manifiesto que la estructura extremal de X se ve favorecida por un mayor grado de desconexión de K.

Recordemos que K es **totalmente disconexo** si todo elemento de K posee una base de entornos constituida por conjuntos abiertos y cerrados.

Teorema 5.3 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *Para cada $x \in B_X$ existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ de elementos del intervalo $[0,1]$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ y una sucesión $\{e_n\}$ de puntos extremos de la bola unidad de X tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$.*

ii) $B_X = \overline{\text{co}}(E_X)$.

iii) *K es totalmente disconexo.*

Demostración:

Sea $x \in B_X$ y supongamos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, con $\{\lambda_n\}$ y $\{e_n\}$ en las condiciones de la afirmación i). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j + (1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j) e_1.$$

Evidentemente $x_n \in \text{co}(E_X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\}$ converge a x, por lo que $x \in \overline{\text{co}}(E_X)$. Esto prueba que i) implica ii).

Para probar que ii) implica iii), sea t_1 un elemento de K distinto de t_0 y sean U y V entornos abiertos y disjuntos de t_0 y t_1 respectivamente. Consideremos dos funciones continuas $x, y : K \to [0,1]$ tales que $x(t_0) = 0$ y $x(t) = 1$, para todo $t \in K \backslash U$, $y(t_1) = 1$ e $y(t) = 0$, para todo t en $K \backslash V$. Evidentemente $x, y \in B_X$ y por tanto existen $f, g \in \text{co}(E_X)$, tales que $\rho(f - x) < \frac{1}{2}$, $\rho(g - y) < \frac{1}{2}$. Puesto que $f(K)$ y $g(K)$ son finitos, los conjuntos $U_1 = \{t \in K : f(t) \leq \frac{1}{2}\}$ y $V_1 = \{t \in K : g(t) \geq \frac{1}{2}\}$ son abiertos y cerrados. Además $t_0 \in U_1 \subset U$ y $t_1 \in V_1 \subset V$. Así pues, todo punto de K posee una base de entornos constituida por conjuntos abiertos y cerrados y K es totalmente disconexo.

Veamos finalmente que iii) implica i). Para ello, sea $f \in X$ con $f(K)$ contenido en $[0,1]$ y consideremos un punto $t \in K$. Si $f(t) \neq 1$, sea V_t un entorno abierto y cerrado de t tal que $V_t \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$. Por otra parte, si $f(t) = 1$, sea V_t un entorno abierto y cerrado de t tal que $V_t \cap f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Obsérvese que cada V_t es disjunto con $f^{-1}(\{1\})$ o con $f^{-1}(\{0\})$. Puesto que $\{V_t : t \in K\}$ es un recubrimiento abierto (y cerrado) de K, existen $t_1, \ldots, t_n$ en K tales que $\{V_{t_1}, \ldots, V_{t_n}\}$ es un recubrimiento de K. Los conjuntos

$$U_{t_1} = V_{t_1},\ U_{t_2} = V_{t_2} \backslash V_{t_1}, \ldots, U_{t_n} = V_{t_n} \backslash \bigcup_{j=1}^{n-1} V_{t_j}$$

son abiertos y cerrados, disjuntos dos a dos y constituyen un recubrimiento de K.

Sea $J = \{j \in \{1, \ldots, n\} : U_{t_j} \cap f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset\}$ y consideremos el conjunto abierto y cerrado $U = \bigcup_{j \in J} U_{t_j}$. Fijemos ahora un punto $t \in K$ y sea j perteneciente a $\{1, \ldots, n\}$ tal que $t \in U_{t_j}$. Si $f(t) = 0$ entonces $U_{t_j} \cap f^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ y por tanto $j \in J$, de donde $t \in U$. Si $f(t) = 1$, entonces $V_{t_j} \cap f^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$ y necesariamente $V_{t_j} \cap f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Luego $j \notin J$ y así $t \in K \backslash U$. Esto prueba que $f^{-1}(\{0\}) \subset U$ y $f^{-1}(\{1\}) \subset K \backslash U$. La aplicación $e : K \to \{0, 1\}$ definida por

$$e(t) = 0, \text{ para todo } t \in U, \quad e(t) = 1, \text{ para todo } t \in K \backslash U$$

es continua (por ser U abierto y cerrado). De hecho, $e \in X$. Además, dado $t \in K$,

$$f(t) = 0 \Rightarrow e(t) = 0,$$

$$f(t) = 1 \Rightarrow e(t) = 1.$$

Sea $y \in X$ con $\rho(y) \leq 1$ y supongamos en primer lugar que $y(t) \geq 0$, para todo $t \in K$.

Consideremos tres números reales $\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, tales que $0 < \lambda < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ y sea $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ una aplicación continua tal que

$$\varphi(s) = 0, \text{ si } s \leq \varepsilon_1,\ \varphi(s) = 1, \text{ si } s \geq \varepsilon_2.$$

Es claro entonces que la aplicación $f : K \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y(t) \leq \varepsilon_1 \\ \varphi(y(t))\frac{y(t)}{\varepsilon_2} & \text{si} \quad \varepsilon_1 \leq y(t) \leq \varepsilon_2 \\ 1 & \text{si} \quad y(t) \geq \varepsilon_2 \end{cases}$$

es continua. De hecho, $f \in X$ y $f(K) \subset [0,1]$. De acuerdo con el razonamiento anterior, existe una aplicación continua $e : K \to \{0,1\}$ tal que $e(t) = 0$ si $f(t) = 0$ y $e(t) = 1$ si $f(t) = 1$. Consideremos ahora la función

$$h = \frac{y - \lambda e}{1 - \lambda}.$$

Si $y(t) \leq \varepsilon_1$, entonces $f(t) = 0$ y en consecuencia, $e(t) = 0$. Luego $h(t) = \frac{y(t)}{1-\lambda} \in [0,1]$.

Si $\varepsilon_1 \leq y(t) \leq \varepsilon_2$, se tiene que

$$0 \leq \tfrac{\varepsilon_1 - \lambda e(t)}{1-\lambda} \leq \tfrac{y(t) - \lambda e(t)}{1-\lambda} \leq \tfrac{y(t)}{1-\lambda} \leq \tfrac{\varepsilon_2}{1-\lambda} < 1,$$

luego también en este caso $h(t) \in [0,1]$.

Finalmente si $y(t) \geq \varepsilon_2$, entonces $f(t) = 1$ y en consecuencia $e(t) = 1$. Por tanto $h(t) = \frac{y(t)-\lambda}{1-\lambda} \in [0,1]$. Es pues claro que h es un elemento de X con $\rho(h) \leq 1$. Además, de la propia definición de h se deduce que

$$y = \lambda e + (1 - \lambda)h.$$

Nótese que e es un punto extremo de la bola unidad de X y que si fuese $y(t) \leq 0$, para todo $t \in K$, el razonamiento precedente aplicado a $-y$ nos proporcionaría la misma representación de y mediante un punto extremo e y un punto h de la bola unidad de X tales que

$$e(K) = \{0, -1\} \text{ y } h(K) \subset [-1, 0].$$

En el caso que nos queda por tratar, existen dos números reales a y b con $a < 0 < b$ y $b - a = 1$ tales que $a \leq y(t) \leq b$, para todo $t \in K$.

Consideremos las funciones $y_1, y_2 : K \to \mathbb{R}$ dadas por

$$y_1(t) = \begin{cases} \frac{y(t)}{b} & \text{si} \quad y(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y(t) \leq 0 \end{cases} \quad , \quad y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y(t) \geq 0 \\ \frac{y(t)}{-a} & \text{si} \quad y(t) \leq 0 \end{cases}$$

que evidentemente son elementos de X con $0 \leq y_1(t) \leq 1$, $-1 \leq y_2(t) \leq 0$, para todo $t \in K$. Además, se comprueba inmediatamente que $y = by_1 - ay_2$. Por lo ya probado, dado $\lambda \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ existen $e \in E_X$ con $e(K) = \{0, 1\}$ y $h \in B_X$ con $h(K) \subset [0, 1]$ tales que $y_1 = \lambda e + (1 - \lambda)h$. De este modo,

$$y = b(\lambda e + (1 - \lambda)h) - ay_2 = b\lambda e + b(1 - \lambda)h - ay_2 = b\lambda e + (1 - b\lambda)\tfrac{b(1-\lambda)h - ay_2}{1 - b\lambda} .$$

Sea $g = \frac{b(1-\lambda)h - ay_2}{1-b\lambda}$ y $t \in K$. Si $y(t) \geq 0$,

$$\tfrac{a}{1-b\lambda} \leq 0 \leq \tfrac{b(1-\lambda)h(t)}{1-b\lambda} = g(t) \leq \tfrac{b(1-\lambda)}{1-b\lambda} .$$

Por otra parte si $y(t) \leq 0$, tenemos (usando que $y(t) \geq a$)

$$\tfrac{a}{1-b\lambda} \leq \tfrac{y(t)}{1-b\lambda} \leq \tfrac{b(1-\lambda)h(t) + y(t)}{1-b\lambda} = \tfrac{b(1-\lambda)h(t) - ay_2(t)}{1-b\lambda} = g(t) \leq \tfrac{b(1-\lambda)}{1-b\lambda} .$$

Luego $g(K) \subset \left[\frac{a}{1-b\lambda}, \frac{b(1-\lambda)}{1-b\lambda}\right]$ y en consecuencia

$$\rho(g) \leq \tfrac{b(1-\lambda)}{1-b\lambda} - \tfrac{a}{1-b\lambda} = \tfrac{1-b\lambda}{1-b\lambda} = 1.$$

Naturalmente, el razonamiento anterior podría hacerse de modo análogo mediante una representación de y_2 (en lugar de y_1) en la forma

$$\lambda e + (1 - \lambda)h$$

con $e(K) = \{-1, 0\}$ y $h(K) \subset [-1, 0]$. Puesto que podemos elegir λ libremente en el intervalo $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ y $\max\{-a, b\} \geq \frac{1}{2}$ hemos probado en definitiva que, cualesquiera que sean α en el intervalo $]0, \frac{1}{4}[$ e y en B_X existen un punto extremo e y un elemento g de la bola unidad de X tales que $y = \alpha e + (1-\alpha)g$.

Sean pues $\alpha \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$ y $x \in B_X$. De acuerdo con lo que acabamos de exponer, existen $e_1 \in E_X$ y $g_1 \in B_X$ tales que $x = \alpha e_1 + (1-\alpha)g_1$. Por la misma razón, $g_1 = \alpha e_2 + (1-\alpha)g_2$ para convenientes $e_2 \in E_X$ y g_2 en B_X. Procediendo de este modo, encontramos una sucesión $\{e_n\}$ de puntos extremos y una sucesión $\{g_n\}$ de elementos de la bola unidad de X tales que $g_n = \alpha e_{n+1} + (1-\alpha)g_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$x = \alpha e_1 + (1-\alpha)\alpha e_2 + (1-\alpha)^2 \alpha e_3 + \cdots + (1-\alpha)^n \alpha e_{n+1} + (1-\alpha)^{n+1} g_{n+1}.$$

De ello se deduce inmediatamente que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^{n-1} \alpha e_n,$$

con lo que basta definir $\lambda_n = (1-\alpha)^{n-1}\alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^{n-1} \alpha = 1. \quad \blacksquare$$

En [1], R. M. Aron y R. H. Lohman introdujeron las siguientes interesantes propiedades:

Un espacio de Banach X tiene la **λ-propiedad**, si para cada $y \in B_X$, existen $\lambda \in \left]0, 1\right]$, $e \in E_X$ y $z \in B_X$ tales que $y = \lambda e + (1-\lambda)z$. Si tal representación es posible con un mismo λ común a todos los elementos de B_X, se dice que X tiene la **λ-propiedad uniforme**.

En el transcurso de la demostración precedente se ha puesto de manifiesto que el espacio X tiene la λ-propiedad uniforme si, y sólo si, K es totalmente disconexo. El paso de la λ-propiedad uniforme a la propiedad i) del teorema anterior (último párrafo de la demostración) es válido en cualquier espacio de Banach (véase [1]) y se ha incorporado con ánimo de completitud.

Para concluir notemos que el teorema precedente es aplicable a espacios del tipo $C_0(L)$, siendo L un espacio de Hausdorff localmente compacto no compacto. Bajo tales condiciones el diámetro es una norma (equivalente a la norma uniforme) y si $K = L \cup \{\infty\}$ es la compactificación por un punto de L, basta considerar $t_0 = \infty$ para observar que $C_0(L)$, con el diámetro, no es otra cosa que el espacio X que venimos considerando, correspondiente a tal elección de t_0. Por tanto, teniendo en cuenta que L es totalmente disconexo si, y sólo si, lo es su compactificación por un punto, tenemos:

Corolario 5.4 *Sea L un espacio localmente compacto no compacto y $C_0(L)$ el espacio de las funciones reales continuas que se anulan en el infinito provisto de la norma del diámetro. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *Para cada elemento x de la bola unidad de $C_0(L)$ existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ de elementos del intervalo $[0,1]$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ y una sucesión $\{e_n\}$ de puntos extremos de $B_{C_0(L)}$ tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$.*

ii) $B_{C_0(L)} = \overline{\mathrm{co}}(E_{C_0(L)})$.

iii) *L es totalmente disconexo.*

Obsérvese en particular que c_0 con la norma del diámetro verifica las propiedades i) y ii) del corolario precedente.

Bibliografía

[1] R. M. Aron and R. H. Lohman, *A geometric function determined by extreme points of the unit ball of a normed space,* Pacific J. Math., **127** (1987), 209-231.

[2] W. G. Bade, *Functional Analysis.* Seminar Notes. University of California, Berkeley, (1957).

[3] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires.* Chelsea Publishing Company. New York Second Edition (1932).

[4] Y. Benyamini and Y. Sternfeld, *Spheres in infinite dimensional normed spaces are Lipschitz contractible,* Proc. Amer. Math. Soc. **88**, (1983), 439-445.

[5] R.M. Blumenthal, J. Lindenstrauss and R.R.Phelps, *Extreme operators into $C(K)$,* Pacific J. Math. **15** (1965), 747-756.

[6] V.I. Bogachev, J.F. Mena-Jurado y J.C. Navarro-Pascual, *Extreme points in spaces of continuous functions,* Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1061-1067.

[7] J. Cantwell, *A topological approach to extreme points in function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 821-825.

[8] M.J. Canfell, *Some characteristics of n-dimensional F-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **159** (1971), 329-334.

[9] P. Cembranos and J. Mendoza, *Banach Spaces of Vector-Valued Functions,* Lecture Notes in Mathematics, (1676), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1997).

[10] J. Conway, *A course in Functional Analysis,* Springer-Verlag, New York, (1985).

[11] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators, Part 1: General theory,* Pure and Appl. Math, Vol **7,** Interscience, New York. (1958).

[12] J. Dugundji, *Topology,* Allyn and Bacon, 1966.

[13] J. Dugundji, *An extension of Tietze's Theorem.* Pacific J. Math., **1** (1951), 353-367.

[14] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, (1989).

[15] A. Gendler, *Extreme operators in the unit ball of $L(C(X), C(Y))$ over the complex field.* Proc. Amer. Math. Soc. **57** (1976), 85-88.

[16] R. Grzaslewicz, *Extreme contractions on real Hilbert spaces.* Math. Ann. **261** (1982), 463-466.

[17] R. Grzaslewicz, *On strongly extreme and denting points in $L(H)$.* Math. Japon. **41** (1995), n^o 2, 283-284.

[18] R. Grzaslewicz, *On the geometry of $L(H)$.* Math. Japon. **49** (1999), n^o 2, 175-183.

[19] D. Handelman, *Stable range in AW^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 241-249.

[20] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions,* Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[21] K. Grove and G.K. Pedersen, *Sub-Stonean Spaces and Corona Sets*, Journal of Functional Analysis **56** (1984), 124-143.

[22] M. Györy and L. Molnár, *Diameter preserving linear biyections of C(X).* Arch. Math., **71** (1998), 301-310.

[23] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book* (second edition). Springer-Verlag, New York, (1982).

[24] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory,* Princeton University Press, (1969).

[25] A. Jiménez-Vargas. *Avances en la representación extremal de funciones continuas.* Tesis Doctoral. Universidad de Almería. España, (1997).

[26] A. Jiménez-Vargas, J. F. Mena-Jurado and J. C. Navarro-Pascual, *Lipschitz mappings on the unit sphere of an infinite-dimensional normed space.* Arch. Math. **79**, (2002), 379-384.

[27] A. Jiménez-Vargas, J.F. Mena-Jurado, R. Nahum and J.C. Navarro-Pascual, *Averages of uniformly continuous retractions.* Studia Math. **135** (1) (1999), 75-81.

[28] A. Jiménez-Vargas, J.F. Mena-Jurado and J.C. Navarro-Pascual, *Complex extremal structure in spaces of continuous functions,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **211** (1997), 605-615.

[29] A. Jiménez-Vargas, J.F. Mena-Jurado y J.C. Navarro-Pascual, *Mappings without fixed or antipodal points. Some geometric applications,* Mathematica Scandinavica **84** (2) (1999), 179-194.

[30] A. Jiménez-Vargas, J.F. Mena-Jurado and J.C. Navarro-Pascual, *Approximation by extreme functions,* Journal of Approximation Theory **97** (1999), 15-30.

[31] A. Jiménez-Vargas, J.F. Mena-Jurado, J.C. Navarro-Pascual and M.G. Sánchez-Lirola, *Means of extreme points and* $F-$*spaces,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **283** (2) (2003), 698-706

[32] R. V. Kadison and G. K. Pedersen. *Means and convex combinations of unitary operators.* Mathematica Scandinavica **57** (1985), 249-266.

[33] C.H. Kan, *Norm structure functions and extremeness criteria for operators on* $Lp(p \leq 1)$ *or onto* $C(K)$, Illinois J. Math. **39** (1995). n^o 4, 531-555.

[34] C. W. Kim, *Extreme contraction operators on* l_∞, Math. Z. **151** (1976), n^o 2, 101-110.

[35] M. Krein and D. Milman. *On extreme points of regular convex sets.* Studia Mathematica **9** (1940), 133-138.

[36] D. G. Larman, *On a conjecture of Lindenstrauss and Perles in at most 6 dimensions,* Glasgow Math. J. **19** (1978), 87-97.

[37] J. Lindenstrauss and M.A. Perles, *On extreme operators in finite-dimensional spaces,* Duke Math. J. **36** (1969), 301-314.

[38] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I,* Springer-Verlag, Berlin, (1977).

[39] J.F. Mena-Jurado and J.C. Navarro-Pascual, *The convex hull of extremal vector-valued continuous functions,* The Bulletin of the London Mathematical Society **27** (1995), 473-478.

[40] J. F. Mena-Jurado and J. C. Navarro-Pascual, *The lambda-function for* $l^1(X)$, Acta Math. Hungar, **73** (1996), 29-31.

[41] H. Minkowski, *Gesammelte Abhandlungen,* Vol. II, Leipzig, 1911. Reprinted Chelsea Publishing Co., New York, 1967.

[42] P. D. Morris and R. R. Phelps, *Theorems of Krein-Milman type for certain convex sets of operators,* Trans. Amer. Math. Soc. **150** (1970), 183-200.

[43] J. C. Navarro-Pascual, *Estructura extremal de la bola unidad en espacios de Banach.* Tesis Doctoral, Granada. España, (1994).

[44] J.C. Navarro-Pascual, *Extreme points and retractions in Banach spaces,* Israel J. Math. **99** (1997), 335-342.

[45] M. A. Navarro, *Some characterizations of finite-dimensional Hilbert spaces,* J. Math. Anal. Appl. **223** (1998), 364-365.

[46] J. C. Navarro-Pascual, J.F. Mena-Jurado and M.G. Sánchez-Lirola, *A two-dimensional inequality and uniformly continuous retractions*, J. Math. Anal. Appl. 339 (2008), 719-734.

[47] J .C. Navarro-Pascual and M.G. Sánchez-Lirola, *A vector valued version of Russo-Dye Theorem*, Communications in Contemporary Mathematics, Vol **11** (No 6) (2009),1035-1048.

[48] J .C. Navarro-Pascual and M.G. Sánchez-Lirola, *Diameter, extreme points and topology,* Studia Mathematica **191** (3) (2009), 203-209.

[49] L. C. Olsen and G. K. Pedersen, *Convex combinations of unitary operators in von Neumann Algebras.* Journal of Functional Analysis **66** (1986), 365-380.

[50] N.T. Peck, *Extreme points and dimension theory,* Pacific Journal of Mathematics, **25** (1968), 341-351.

[51] G. K. Pedersen, *Analysis now,* Springer-Verlag, New York, (1988).

[52] R.R. Phelps, *Extreme points in function algebras*, Duke Math. J. **32** (1965), 267-277.

[53] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem.* Second edition. *Lecture Notes in Mathematics, 1757.* Springer-Verlag, Berlin, (2001).

[54] A.G. Robertson, *Averages of extreme points in complex functions spaces,* Journal of the London Mathematical Society (2) **19** (1979), 345-347.

[55] M. Rordam, *Advances in the theory of unitary rank and regular approximation,* Annals of Mathematics **128** (1988), 153-172.

[56] Nina M. Roy, *Extreme Points of Convex Sets in Infinite Dimensional Spaces.* Rosemont College, Rosemont, PA (1987), 409-422.

[57] B. Russo and H. Dye, *A note on unitary operators in C^*-algebras*, Duke Math. J. **33** (1966), 413-416.

[58] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions,* PWN-Polish Scientific Publishers, Warzawa, (1971).

[59] M. Sharir, *Extremal structure in operator spaces,* Amer. Math. Soc. **186** (1973), 91-111.

[60] M. Sharir, *A counterexample on extreme operators,* Israel J. Math. **24** (1976), 320-328.

[61] M. Sharir, *A non-nice extreme operator,* Israel J. Math. **26** (1977), 306-312.

[62] Yu.M. Smirnov, *On the dimension of proximity spaces*, Mat. Sb. (N.S.) 38 (80) (1956) 283-302; English translation: American Mathematical Society Translation Service 2 21 (1962), 1-20.

[63] L. A. Steen and J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology,* Springer, 1978.

[64] R.C. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, Springer-Verlag, (1974).

Glosario

Universidad de Almería